MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

29. BAND 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 15. FEBRUAR 1929)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1929

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

29. Band. **Inhalt:** 4. Heft.

Seite

Bergmann, St., Über eine Darstellung der Abbildungsfunktion eines Sternbereiches 481

Liebmann, H., Die Integralkurven der Clairautschen Differentialgleichung . . . 487

Hopf, H., Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten 493

Popken, J., Zur Transzendenz von e 525

Popken, J., Zur Transzendenz von π 542

Pólya, G., Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen . 549

Über eine Darstellung der Abbildungsfunktion eines Sternbereiches.

Von

Stefan Bergmann in Berlin.

Gegeben sei ein Sternbereich G der komplexen z-Ebene (Fig. 1), der den Anfangspunkt O in seinem Innern enthält und von einer rektifizierbaren Kurve K begrenzt ist. Die Entfernung R der Randpunkte des Bereiches vom Nullpunkte O soll als Funktion des Polarwinkels φ bekannt sein, und zwar in Form einer Fourierschen Reihe vorliegen:

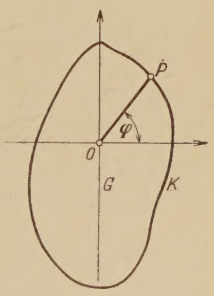

Fig. 1.

$$(1)\qquad R \sim A_0^{(1)} + A_1^{(1)} e^{i\varphi} + A_2^{(1)} e^{2i\varphi} + A_3^{(1)} e^{3i\varphi} + A_4^{(1)} e^{4i\varphi} + \ldots + A_{-1}^{(1)} e^{-i\varphi} + A_{-2}^{(1)} e^{-2i\varphi} + A_{-3}^{(1)} e^{-3i\varphi} + A_{-4}^{(1)} e^{-4i\varphi} + \ldots .$$ [1])

Die Fourierschen Koeffizienten der Funktion R^n (wo n eine ganze positive Zahl ist), bezeichnen wir mit $A_k^{(n)}$. Wir haben demnach:

$$(2)\qquad R^n \sim A_0^{(n)} + A_1^{(n)} e^{i\varphi} + A_2^{(n)} e^{2i\varphi} + A_3^{(n)} e^{3i\varphi} + A_4^{(n)} e^{4i\varphi} + \ldots + A_{-1}^{(n)} e^{-i\varphi} + A_{-2}^{(n)} e^{-2i\varphi} + A_{-3}^{(n)} e^{-3i\varphi} + A_{-4}^{(n)} e^{-4i\varphi} + \ldots .$$

Mit

$$(3)\qquad W(z) \equiv z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots$$

bezeichnen wir das Funktionselement derjenigen Funktion $w(z)$, welche den Bereich G auf einen Kreis abbildet. Wir werden beweisen, daß

[1]) $A_{-k}^{(1)}$ ist natürlich zu $A_k^{(1)}$ konjugiert komplex.

$$(4)\qquad \frac{dW(z)}{dz} = \lim_{n\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \cdots & z^n \\ \frac{1}{3}A_1^{(3)} & \frac{1}{4}A_0^{(4)} & \frac{1}{5}A_{-1}^{(5)} & \cdots & \frac{1}{n+3}A_{-(n-1)}^{(n+3)} \\ \frac{1}{4}A_2^{(4)} & \frac{1}{5}A_1^{(5)} & \frac{1}{6}A_0^{(6)} & \cdots & \frac{1}{n+4}A_{-(n-2)}^{(n+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+2}A_n^{(n+2)} & \frac{1}{n+3}A_{(n-1)}^{(n+3)} & \frac{1}{n+4}A_{(n-2)}^{(n+4)} & \cdots & \frac{1}{2n+2}A_0^{(2n+2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{4}A_0^{(4)} & \frac{1}{5}A_{-1}^{(5)} & \frac{1}{6}A_{-2}^{(6)} & \cdots & \frac{1}{n+3}A_{-(n-1)}^{(n+3)} \\ \frac{1}{5}A_1^{(5)} & \frac{1}{6}A_0^{(6)} & \frac{1}{7}A_{-1}^{(7)} & \cdots & \frac{1}{n+4}A_{-(n-2)}^{(n+4)} \\ \frac{1}{6}A_2^{(6)} & \frac{1}{7}A_1^{(7)} & \frac{1}{8}A_0^{(8)} & \cdots & \frac{1}{n+5}A_{-(n-3)}^{(n+5)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+3}A_{(n-1)}^{(n+3)} & \frac{1}{n+4}A_{(n-2)}^{(n+4)} & \frac{1}{n+5}A_{(n-3)}^{(n+5)} & \cdots & \frac{1}{2n+2}A_0^{(2n+2)} \end{vmatrix}}$$

ist.

Diese Relation ergibt sich sofort aus der bei anderer Gelegenheit bewiesenen Formel[2]):

$$(5)\qquad \frac{dW(z)}{dz} = \lim_{n\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \cdots & z^n \\ \iint_G \bar{z}\,d\omega & \iint_G z\bar{z}\,d\omega & \iint_G z^2\bar{z}\,d\omega & \cdots & \iint_G z^n\bar{z}\,d\omega \\ \iint_G \bar{z}^2\,d\omega & \iint_G z\bar{z}^2\,d\omega & \iint_G z^2\bar{z}^2\,d\omega & \cdots & \iint_G z^n\bar{z}^2\,d\omega \\ \iint_G \bar{z}^3\,d\omega & \iint_G z\bar{z}^3\,d\omega & \iint_G z^2\bar{z}^3\,d\omega & \cdots & \iint_G z^n\bar{z}^3\,d\omega \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \iint_G \bar{z}^n\,d\omega & \iint_G z\bar{z}^n\,d\omega & \iint_G z^2\bar{z}^n\,d\omega & \cdots & \iint_G z^n\bar{z}^n\,d\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \iint_G z\bar{z}\,d\omega & \iint_G z^2\bar{z}\,d\omega & \iint_G z^3\bar{z}\,d\omega & \cdots & \iint_G z^n\bar{z}\,d\omega \\ \iint_G z\bar{z}^2\,d\omega & \iint_G z^2\bar{z}^2\,d\omega & \iint_G z^3\bar{z}^2\,d\omega & \cdots & \iint_G z^n\bar{z}^2\,d\omega \\ \iint_G z\bar{z}^3\,d\omega & \iint_G z^2\bar{z}^3\,d\omega & \iint_G z^3\bar{z}^3\,d\omega & \cdots & \iint_G z^n\bar{z}^3\,d\omega \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \iint_G z\bar{z}^n\,d\omega & \iint_G z^2\bar{z}^n\,d\omega & \iint_G z^3\bar{z}^n\,d\omega & \cdots & \iint_G z^n\bar{z}^n\,d\omega \end{vmatrix}},$$

[2]) Vgl. die Arbeit: „Über die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators“, Math. Zeitschr. **19** (1923), S. 8—25, § 3, Formel (3). Ich möchte bei dieser Gelegenheit einen Druckfehler in der genannten Arbeit berichtigen: S. 13 Zeile 17 von oben soll: „die Punkte A, L, D, C“ und nicht: „die Punkte A, H, C, D“ heißen.

in welcher $d\omega$ das Flächenelement, $\bar{z}$ den zu z konjugiert komplexen Wert bedeutet[3]).

Wenn man berücksichtigt, daß

$$(6) \qquad \iint_G z^k \bar{z}^s \, d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^k r^s e^{i\varphi(k-s)} r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^{k+s+2}}{k+s+2} e^{i\varphi(k-s)}$$

$$= \frac{2\pi}{k+s+2} A_{(s-k)}^{(s+k+2)}$$

ist, und in (5) die Flächenintegrale durch $\frac{2\pi}{k+s+2} A_{(s-k)}^{(s+k+2)}$ ersetzt, so gelangt man zur Formel (4).

Die Formel (4) leistet gute Dienste bei der numerischen Berechnung von $w(z)$, falls der Bereich G graphisch gegeben ist. Die Berechnung der Fourierschen Koeffizienten $A_k^{(s)}$ bietet keine Schwierigkeiten. Approximiert man R durch $\sum_{k=0}^{k=m} (A_k^{(1)} e^{ik\varphi} + A_{-k}^{(1)} e^{-ik\varphi})$ und setzt die auf diese Weise für $A_k^{(s)}$ erhaltenen Ausdrücke in (4) ein, so lassen sich für kleine Werte von n die Determinanten ausrechnen und man kann deren Quotient in Form eines Bruches darstellen, in welchem Zähler und Nenner Polynome in $A_k^{(1)}$ und z sind. Diese Ausdrücke eignen sich zur numerischen Ausrechnung und liefern gute Näherungswerte für $w(z)$.

Eine weitere interessante Anwendung der Formel (4) bilden gewisse Sätze über Fouriersche Reihen.

Satz I. *Entwickelt man eine positive stetige und periodische Funktion $f(\varphi)$ von beschränkter Schwankung in eine Fouriersche Reihe*

$$(7) \quad f(\varphi) = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} e^{i\varphi} + A_2^{(1)} e^{2i\varphi} + A_3^{(1)} e^{3i\varphi} + A_4^{(1)} e^{4i\varphi} + \ldots$$

$$+ A_{-1}^{(1)} e^{-i\varphi} + A_{-2}^{(1)} e^{-2i\varphi} + A_{-3}^{(1)} e^{-3i\varphi} + A_{-4}^{(1)} e^{-4i\varphi} + \ldots,$$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad \varphi \text{ reell},$$

so besteht zwischen dem Minimalwert m von $f(\varphi)$ und den Fourierschen Koeffizienten die Ungleichung:

[3]) Die Formel (5) läßt sich veral'gemeinern: In gewissen Fällen kann man die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,z)}$ desjenigen Paares von Funktionen $v(x,z)$, $w(x,z)$ zweier komplexen Veränderlichen x, z, die einen vierdimensionalen Bereich auf den (vierdimensionalen) „Kreisbereich" abbilden, in einer ähnlichen wie der Ausdruck (5) Gestalt darstellen. Vgl. dazu die Arbeiten: „Über Hermitesche Formen, die zu einem Bereich gehören", Sitzungsberichte der Berliner Mathemat. Gesellschaft 26 (1927), S. 178–184 und „Über unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", erscheint demnächst in der Math. Zeitschrift.

(8) $$m \geqq \frac{1}{4} \Delta;$$

(9) $$\Delta^2 = 2 \lim_{n \to \infty} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} A_0^{(2)} & \frac{1}{3} A_{-1}^{(3)} & \frac{1}{4} A_{-2}^{(4)} & \cdots & \frac{1}{n+2} A_{-n}^{(n+2)} \\ \frac{1}{3} A_1^{(3)} & \frac{1}{4} A_0^{(4)} & \frac{1}{5} A_{-1}^{(5)} & \cdots & \frac{1}{n+3} A_{-(n-1)}^{(n+3)} \\ \frac{1}{4} A_2^{(4)} & \frac{1}{5} A_1^{(5)} & \frac{1}{6} A_0^{(6)} & \cdots & \frac{1}{n+4} A_{-(n-2)}^{(n+4)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+2} A_n^{(n+2)} & \frac{1}{n+3} A_{(n-1)}^{(n+3)} & \frac{1}{n+4} A_{(n-2)}^{(n+4)} & \cdots & \frac{1}{2n+2} A_0^{(2n+2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} A_0^{(4)} & \frac{1}{5} A_{-1}^{(5)} & \frac{1}{6} A_{-2}^{(6)} & \cdots & \frac{1}{n+3} A_{-(n-1)}^{(n+3)} \\ \frac{1}{5} A_1^{(5)} & \frac{1}{6} A_0^{(6)} & \frac{1}{7} A_{-1}^{(7)} & \cdots & \frac{1}{n+4} A_{-(n-1)}^{(n+4)} \\ \frac{1}{6} A_2^{(6)} & \frac{1}{7} A_1^{(7)} & \frac{1}{8} A_0^{(8)} & \cdots & \frac{1}{n+5} A_{-(n-3)}^{(n+5)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+3} A_{n-1}^{(n+3)} & \frac{1}{n+4} A_{(n-2)}^{(n+4)} & \frac{1}{n+5} A_{(n-3)}^{(n+5)} & \cdots & \frac{1}{2n+2} A_0^{(2n+2)} \end{vmatrix}},$$

wobei die $A_k^{(n)}$ den in (2) angegebenen Wert haben.

Beweis. Wir betrachten einen Sternbereich G, bei dem jeder Randpunkt P um $f(\varphi)$ von Nullpunkt O entfernt ist, wenn wir wie früher mit φ den Polarwinkel bezeichnen. Bilden wir den Bereich G durch die oben angegebene Funktion $w(z)$ auf einen Kreis ab, so wird die Fläche dieses Kreises durch (9) mal π [4]) gegeben. Da andererseits nach dem Koebeschen Verzerrungssatz jeder Randpunkt von G mindestens um Viertel des Kreisradiuses vom Nullpunkte entfernt sein muß, so folgt daraus unsere Behauptung.

Eine Abschätzung nach oben läßt sich aus unseren Überlegungen nicht angeben. Benutzen wir den Verzerrungssatz in der von Pick und Bieberbach[5]) angegebenen Fassung, so folgt, daß für den Maximalwert der Fourierschen Reihe $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n^{(1)} s^{|n|} e^{in\varphi}$, den wir mit $M(s)$ bezeichnen, die Ungleichung

$$M(s) \leqq \frac{|s|}{\left[1 - \frac{|s|}{\Delta}\right]^2} \qquad (|s| < 1)$$

gilt.

[4]) Vgl. dazu die unter Fußnote [2]), S. 482 angegebene Arbeit § 2, S. 17, Formel (4).

[5]) Vgl. dazu L. Bieberbach, „Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln", Sitzungsberichte der kön. preußischen Akademie der Wissenschaften (1916) S. 940–955 und G. Pick, „Über den Koebeschen Verzerrungssatz". Berichte der königl. sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig (1916) S. 58–64, Formel (10).

Satz II[6]). *Eine stetige, reinperiodische Funktion von beschränkter Schwankung*

$$h(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}{}' A_k^{(1)} e^{ik\varphi} \tag{10}$$

verschwindet an mindestens einer Stelle dann und nur dann, wenn der Ausdruck

$$2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}A_0^{(4)} & \frac{1}{3}A_{-1}^{(6)} & \frac{1}{4}A_{-2}^{(8)} & \cdots & \frac{1}{n+2}A_{-n}^{(2n+4)} \\ \frac{1}{3}A_1^{(6)} & \frac{1}{4}A_0^{(8)} & \frac{1}{5}A_{-1}^{(10)} & \cdots & \frac{1}{n+3}A_{-(n-1)}^{(2n+6)} \\ \frac{1}{4}A_2^{(8)} & \frac{1}{5}A_1^{(10)} & \frac{1}{6}A_0^{(12)} & \cdots & \frac{1}{n+4}A_{-(n-2)}^{(2n+8)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+2}A_n^{(2n+4)} & \frac{1}{n+3}A_{(n-1)}^{(2n+6)} & \frac{1}{n+4}A_{(n-2)}^{(2n+8)} & \cdots & \frac{1}{2n+2}A_0^{(4n+4)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{4}A_0^{(8)} & \frac{1}{5}A_{-1}^{(10)} & \frac{1}{6}A_{-2}^{(12)} & \cdots & \frac{1}{n+3}A_{-(n-1)}^{(2n+6)} \\ \frac{1}{5}A_1^{(10)} & \frac{1}{6}A_0^{(12)} & \frac{1}{7}A_{-1}^{(14)} & \cdots & \frac{1}{n+4}A_{-(n-2)}^{(2n+8)} \\ \frac{1}{6}A_2^{(12)} & \frac{1}{7}A_1^{(14)} & \frac{1}{8}A_0^{(16)} & \cdots & \frac{1}{n+5}A_{-(n-3)}^{(2n+10)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+3}A_{(n-1)}^{(2n+6)} & \frac{1}{n+4}A_{(n-2)}^{(2n+8)} & \frac{1}{n+5}A_{(n-3)}^{(2n+10)} & \cdots & \frac{1}{2n+2}A_0^{(4n+4)} \end{vmatrix}} \tag{11}$$

gleich Null ist. Verschwindet $h(\varphi)$ nirgends, so ist der Ausdruck (11) *positiv.*

Beweis. Wir ziehen wiederum den Bereich G heran, wobei jetzt R den Wert $h^2(\varphi)$ haben soll. Ist $h^2(\varphi)$ überall größer als Null, so enthält G den Anfangspunkt in seinem Innern. Der oben angegebene Limes (11) gibt den Inhalt des durch Vermittelung von $w(z)$ entstandenen Bildbereiches. Dieser Inhalt ist stets größer als Null. Die Annahme, daß $h^2(\varphi)$ (also auch $h(\varphi)$) nirgends verschwindet, ist wesentlich. Formel (11) gibt für ein endliches n den Inhalt des kleinsten Bildbereiches von G, der durch Abbildung vermittelst eines Polynomes n-ten

[6]) Ein sehr nahe verwandtes Problem: die Frage des Koeffizientenschemas des Funktionselementes mit positivem Realteil im Innern des Einheitskreises wurde mit anderen Hilfsmitteln — in einer Reihe von Arbeiten von Carathéodory, Toeplitz, Schur, Herglotz und anderen Mathematikern erledigt. Wegen der Literatur vgl. die Enzyklop. d. mathem. Wissenschaft. Vlg. Teubner, Leipzig (1921). Analysis II C 4. L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. § 60 S. 500.

Grades von der Form

$$z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n \tag{12}$$

zustande kommt. Es läßt sich aber leicht folgender Satz beweisen: Ist G ein Sternbereich, von dem mindestens ein Randpunkt sich im Anfangspunkte befindet, so läßt sich stets ein Polynom g_n von der Form

$$g_n = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \ldots + b_n z^n$$

angeben, welches G auf einen Bereich mit beliebig kleinem Inhalt abbildet.

Um dies einzusehen, betrachte man den Sternbereich G^*, dessen Randpunkte die Entfernung

$$R^*(\varphi) = h^2(\varphi) + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

vom Nullpunkt 0 haben. Der Bereich G^* ist zusammenhängend und enthält den Nullpunkt im Innern. Der Minimalabstand seiner Randkurve vom Nullpunkte ist genau ε. G^* läßt sich vermittelst einer Funktion $w^*(z)$ [die im Mittelpunkte verschwindet und ebenda die Ableitung eins hat], auf einen Kreis abbilden. Nach dem Koebeschen Verzerrungssatze ist der Radius dieses Kreises höchstens 4ε.

Fig. 2.

Dem Rungeschen Approximationssatze zufolge können wir die Abbildungsfunktion in dem Teilbereiche G von G^* durch ein Polynom g_n beliebig approximieren, wodurch wir ein Polynom g_n erhalten, welches G auf einen beliebig kleinen Bereich abbildet. Es konvergiert somit auch in diesem Falle der Limes (11) gegen Null.

Man kann schließlich Ungleichungen, deren Quotienten von zwei unendlichen Determinanten von einer ähnlichen Bauart, wie sie oben betrachtet wurden, genügen, — angeben. Man gelangt zu diesen Ungleichungen, falls man die Koeffizienten a_k des Funktionselementes (3) mit Hilfe des Ausdruckes (4) darstellt. a_k erscheint alsdann in der Form eines Quotienten der angegebenen Art (den wir aus Raumrücksichten hier explizite nicht aufschreiben). Andererseits genügen nach einem bekannten Satz von Herrn Löwner[7]) die a_k (d. h. diese Quotienten) der Ungleichung:

$$|a_k| \leqq 4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+2)} \left(\frac{2}{\Delta}\right)^{k-1},$$

wo Δ^2 der durch (9) gegebene Ausdruck ist.

[7]) Vgl. dazu K. Löwner. „Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Mathem. Annalen 89 (1923) S. 103–121. Formel (64).

(Eingegangen am 2. Dezember 1926.)

Die Integralkurven der Clairautschen Differentialgleichung.

Von

Heinrich Liebmann in Heidelberg.

Im folgenden wird das Hauptergebnis der Arbeit abgeleitet, zu der Herr Kamke [1]) durch das Bestreben angeregt worden ist, die Ausführungen von Herrn Bieberbach [2]) über die Clairautsche Differentialgleichung

$$y = px - f(p) \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

zu vertiefen.

Der Funktion $f(p)$ ist zunächst als einzige Bedingung die Eindeutigkeit auferlegt, d. h. zu jeder vorgeschriebenen Tangentenrichtung gibt es eine und nur eine Tangente. Die genau zu erfassende Definition der Integralkurven führt dann zu den weiteren Einschränkungen, und die Integration der Gleichung schließt sich zwangläufig an.

§ 1.

Zulässige Integralkurven.

Welche Gestalt wird jeder einzelnen Integralkurve einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung durch die heute bei Existenzbeweisen üblichen — sonst nicht immer eingehaltenen — Forderungen auferlegt?

Es wird verlangt, daß p eine eindeutige beschränkte Funktion von x ist, d. h. die Kurve hat in jedem ihrer Punkte eine nicht-vertikale Tangente, nirgends eine Ecke. Rückkehrpunkte mit nicht-vertikaler Tangente sind auszuschließen — hier beginnen zwei verschiedene Integral-

[1]) E. Kamke, Über die Clairautsche Differentialgleichung. Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 623–639.

[2]) L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 2. Aufl., Berlin 1926, S. 20.

kurven — aber auch solche mit vertikaler Tangente. Also treten Spitzen nicht auf[3]).

Außerdem ist an die bekannte Eigenschaft des Differentialquotienten zu erinnern.

Es sei in

$$P_1(x_1 y_1) \dots \frac{dy}{dx} = p_1$$

und in einem zweiten Punkt

$$P_2(x_2, y_2) \dots \frac{dy}{dx} = p_2 \qquad (x_2 > x_1),$$

so gibt es auf dem Kurvenstück $(P_1 P_2)$ mindestens einen Punkt, für den p einen beliebig vorgeschriebenen zwischen p_1 und p_2 gelegenen Zwischenwert annimmt (Z. — Eigenschaft).

Jedes Kurvenstück kann außer Intervallen, in denen p sich beständig ändert (Bögen), auch Intervalle mit konstantem p, also gerade Einsatzstücke (Stege) aufweisen. Der zwei Bögen $(P_1 Q_1)$ und $(P_2 Q_2)$ verbindende Steg gehört der Tangente des ersten Bogens in Q_1 und der des zweiten in P_2 an, er ist die Strecke $Q_1 P_2$.

„Stegkurve" (St.-K.), so wollen wir fortan jedes Kurvenstück mit solchen Einsatzstrecken, „Bogenkurve" (Bg.-K.) jedes stegfreie Kurvenstück nennen.

So ist z. B. durch

$$\begin{aligned} y &= (x+1)^2 \quad \text{für} \quad x \leqq -1, \\ y &= 0 \qquad\quad \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq 0, \\ y &= x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{für} \quad x \geqq 0 \end{aligned}$$

eine St.-K. gegeben; der mittlere Teil ist der Steg.

Die Menge der Stege ist immer abzählbar, weil jeder Steg ein zugehöriges Intervall der x-Achse erfordert (p ist beschränkt!) und diese Intervalle als elementfremd abzählbar sind.

Es kann vorkommen, daß kein einziges Kurvenstück von Stegen frei ist, und man kann sich auch leicht ein Bild davon verschaffen durch folgenden Aufbau. Man geht von einer beliebigen Bogenkurve aus, das Intervall sei etwa

$$0 \leqq x \leqq 1,$$

---

[3]) Wegen der Beschränkung von p und y ist dann auch

$$y - px,$$

die Ordinate der Spur der Tangente auf der y-Achse beschränkt.

wählt dann auf ihr die Punkte $P_1, P_2 \ldots$, die abzählbar und überall dicht sein können, z. B. zu den Abszissen

$$x_1 = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{1}{4}, \; x_3 = \frac{3}{4},$$

$$x_4 = \frac{1}{8}, \; x_5 = \frac{3}{8}, \; x_6 = \frac{5}{5}, \; x_7 = \frac{7}{8}$$

usw. gehören, und zerschneidet die Kurve in diesen Punkten. Dann schiebt man auf der Abszisse als neue Basisstrecken ein

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n,$$

die sämtlich größer als Null sind und so gewählt werden, daß die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = b$$

konvergiert. Mit dieser Einschiebung wird der Stegeinbau verbunden, also mit der Einschiebung von b_1 wird zugleich der rechts von P_1 liegende Teil der Kurve in der durch

$$\operatorname{tang} \tau_1 = p_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$$

gegebenen Richtung parallel verschoben usw. Das Ergebnis ist die Stegkurve, die zum Intervall

$$0 \leqq x \leqq 1 + b$$

gehört.

Diesem Aufbau steht der Abbau gegenüber, der eine Stegkurve in eine Bogenkurve verwandelt: Man denke sich die Intervallstrecken b_ν, zu denen Stege gehören, etwa der Größe nach geordnet — gleiche b_ν werden dabei in der Ordnung aufgeführt, wie sie einander auf der x-Achse folgen. Dann zieht man die Stege der Reihe nach ein durch Parallelverschiebung des rechts liegenden Kurventeils nach links in Richtung des auszuschaltenden Steges.

Nach dem n-ten Schritt ist aus der St.-Kurve

$$y = F(x)$$

geworden

$$\bar{x}(x, n) = x - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^*,$$

$$\bar{y}(x, n) = F(x) - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^* p_\nu^*,$$

wobei der Stern bedeutet, daß in die Summe nur die dem Intervall von 0 bis x zugehörigen Stege einbezogen wurden. Mit wachsendem n kon-

vergiert diese Konstruktion asymptotisch gegen die durch

$$\bar{x} = x - \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^*$$

$$\bar{y} = F(x) - \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^* p_\nu^*$$

gegebene Bogenkurve.

§ 2.

Der Ausschluß paralleler Tangenten.

Es soll jetzt im Hinblick auf die Clairautsche Gleichung noch verlangt werden, daß im Verlauf einer Kurve niemals zwei parallele Tangenten bzw. Stege auftreten.

p kann dann im Verlauf der Kurve nur monoton sein; denn gleiche Werte von p an verschiedenen Stellen, also parallele Tangenten, widersprechen der Monotonie, und nicht monotones p erfordert, daß es drei Stellen gibt, derart, daß an der ersten und dritten p kleiner (größer) ist als an der mittleren. Wegen der Z.-Eigenschaft gibt es also mindestens zwei Stellen (Punkte bzw. Stege) mit gleichem p.

Nachdem die Monotonie (von p als Funktion von x, konstantes p bedeutet eingefügte Stege) erwiesen ist, beschränken wir uns auf den Fall monotonen Wachstums.

Für die Funktion

$$u = px - y$$

gilt dann die folgende Überlegung:

Es sei $x_2 > x_1$, wobei die zugehörigen Punkte der Kurve nicht demselben Steg angehören, dann ist

$$\Delta u_1 = u_2 - u_1 = p_2 x_2 - y_2 - (p_1 x_1 - y_1)$$

leicht in eine Gestalt zu bringen, die über die Abhängigkeit des u von p aufklärt. Es gilt

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)(p_1 + \vartheta_1 (p_2 - p_1)) \qquad (0 < \vartheta_1 < 1)$$

und daher

$$\Delta u_1 = \Delta p_1 (x_2 (1 - \vartheta_1) + x_1 \vartheta_1) = \Delta p_1 \cdot x_{12},$$

wobei

$$x_1 < x_{12} < x_2,$$

ebenso

$$u_3 - u_2 = \Delta u_2 = \Delta p_2 (x_3 (1 - \vartheta_2) + x_2 \vartheta_2) = \Delta p_2 \cdot x_{23}$$

$$x_2 < x_{23} < x_3.$$

Also ist

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta p_1} < \frac{\Delta u_2}{\Delta p_2},$$

und es nimmt u mit wachsendem p immer stärker zu, d. h. u ist hier eine konkave Funktion von p, daher nach bekannten Sätzen stetig und bis auf eine abzählbare Menge von Punkten (es sind die den Stegen entsprechenden) differenzierbar. In diesen Punkten ist die Linksableitung kleiner als die Rechtsableitung [4]).

§ 3.

Integration der Clairautschen Gleichung.

Im Anschluß hieran folgt alles Weitere ganz von selbst.

Ist

$$y = xp - f(p)$$

die Clairautsche Gleichung und wird

$$u = xp - y$$

eingeführt, so ist

$$\Delta u = \Delta f = \Delta p\,((x + \Delta x)(1 - \vartheta) + x\vartheta) = \Delta p\,(x + (1 - \vartheta)\Delta x)$$
$$(0 < \vartheta < 1),$$

wobei die Punkte

$$x, y \quad \text{und} \quad x + \Delta x, y + \Delta y$$

nicht demselben Steg angehören.

Ist dann $\underline{x}$ die Abszisse des Anfangspunktes, $\bar{x}$ die des Endpunktes eines Steges, so liegen vor $\underline{x}, \underline{y}$ nur Punkte (und Stege) mit kleinerem, hinter $\bar{x}, \bar{y}$ nur Punkte (und Stege) mit größerem p, also geht mit

$$\Delta p \leqq 0$$

im Punkt $\underline{x}, \underline{y}$ auch Δx $(\leqq 0)$ zu Null und im Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ mit

$$\Delta p \geqq 0$$

auch Δx $(\geqq 0)$ zu Null. Daher ist für $x = \underline{x}$

$$x = \operatorname*{limes}_{\Delta p = 0} \frac{\Delta f}{\Delta p} = \left(\frac{df}{dp}\right), \quad (\Delta p \leqq 0),$$

und für $x = \bar{x}$ wird

$$\bar{x} = \operatorname*{limes}_{\Delta p = 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta p}\right) = \left(\frac{df}{dp}\right)_+, \quad (\Delta p \geqq 0).$$

---

[4]) Man findet für diese längst zum Gemeingut gewordenen Sätze die Beweise z. T. bei Jensen, Acta mathematica **30** (1906), p. 189 ff. Übrigens kann durch geometrische Betrachtung allein ohne jede Formel sofort erkannt werden, daß an die Integralkurve sich durch keinen Punkt drei Tangenten legen lassen, und dann mit Hilfe der Berührungstransformation

$$\bar{x} = -p, \qquad \bar{y} = xp - y, \qquad \bar{p} = -x,$$

daß die Kurve

$$u = f(p)$$

von keiner Sekante dreimal getroffen wird, also konvex oder konkav ist usw.

Für Punkte im Innern eines Bogenintervalles ist

$$x = \frac{df}{dp}.$$

Also gibt es folgende Integralkurven:

1. die soeben beschriebene, dargestellt durch

$$x = \frac{df}{dp},$$
$$y = xp - f(p)$$

für innere Punkte eines Bogenintervalles und durch

$$y = \underline{y} + p(x - \underline{x}) = \bar{y} - p(\bar{x} - x) \quad (\underline{x} \leqq x \leqq \bar{x})$$

für die Stege. $\underline{x}$ und $\bar{x}$ sind oben angegeben, $\underline{y}$ und $\bar{y}$ sind durch

$$\underline{y} = \underline{x}p - f(p),$$
$$\bar{y} = \bar{x}p - f(p)$$

gegeben;

2. ihre Tangenten;

3. Mischkurven, die als mittleren Teil ein Stück der Kurve enthalten, links und rechts anschließend die Tangenten.

Wie ist das Ergebnis schließlich aufzufassen? Für Bogenkurven das altbekannte Bild:

1. die durch

$$x = \frac{df}{dp}, \qquad y = p\frac{df}{dp} - f(p)$$

gegebene Hüllkurve der Geradenschar

$$y = cx - f(c);$$

2. diese Tangenten;

3. die für gewöhnlich nicht hervorgehobenen aus einem Bogenstück von (1) und zwei links und rechts anschließenden Tangenten bestehenden Mischkurven. Zu fordern ist selbstverständlich, daß kein Paar paralleler Tangenten vorkommt, wodurch eben die Monotonie von $\frac{df}{dp}$ bedingt wird.

Der allgemeinere Fall bietet also keine Überraschungen: Man schiebt in die Hüllkurve Stege ein, wodurch eigentlich nichts geändert wird, und man wird auch hier, ohne ein Mißverständnis befürchten zu müssen, die Bezeichnung „Hüllkurve“ beibehalten dürfen.

Heidelberg, 17. März 1928.

(Eingegangen am 18. März 1928.)

Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten[1]).

Von

Heinz Hopf in Berlin.

Als „algebraische“ Anzahl der Fixpunkte einer stetigen Abbildung darf die Summe der Indizes der Fixpunkte bezeichnet werden, da der „Index“ die natürliche und zweckmäßige geometrische Verallgemeinerung der algebraischen „Vielfachheit“ ist[2]). Seit Brouwers Beweisen der Fixpunktsätze für die n-dimensionalen Kugeln und Elemente[3]) ist diese Indexsumme der Gegenstand einer Reihe spezieller Untersuchungen gewesen; der Nachweis, daß sie von Null verschieden ist, sichert in jedem einzelnen Fall die Existenz wenigstens eines Fixpunktes[4]).

Ihre durch Lefschetz erfolgte Bestimmung für beliebige Abbildungen beliebiger Mannigfaltigkeiten[5]) bedeutet einen der wichtigsten Fortschritte

[1]) Eine Voranzeige dieser Arbeit ist unter dem Titel: *A new proof of the Lefschetz formula on invariant points* in den *Proceedings of the Nat. Acad. of Sciences U.S.A.* **14**, *Nr.* 2 (1928) erschienen. Bezüglich der Unterschiede zwischen den Beweisen in dieser Note und der vorliegenden Arbeit s. unten, Fußnote [27]).

[2]) Der Begriff des „Index“ ist im Anschluß an Kronecker im wesentlichen von Poincaré definiert worden [Sur les courbes définies par les équations différentielles, 3. partie, chap. 13; 4. partie, chap. 18; Journ. de Math. (4) **1** (1885); (4) **2** (1886)]. Seine topologische Definition — s. § 7 der vorliegenden Arbeit — ist in der unter [3]) genannten Arbeit von Brouwer enthalten.

[3]) Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. **71** (1911).

[4]) Die Bestimmung von Fixpunktzahlen in schärferem als dem „algebraischen“ Sinne ist neuerdings von J. Nielsen erfolgreich in Angriff genommen worden [Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta mathematica **50** (1927)]. Es wird dort (S. 354—358) u. a. gezeigt, daß auch, wenn die Indexsumme 0 ist, „topologisch notwendige“ Fixpunkte vorhanden sein können.

[5]) Lefschetz, Intersections and transformations of complexes and manifolds, Transact. Amer. Math. Soc. **28** (1926); Manifolds with a boundary and their transformations, Transact. Amer. Math. Soc. **29** (1927).

in der Topologie der stetigen Abbildungen. Die von Lefschetz entdeckte Formel drückt die fragliche Zahl durch Größen aus, welche mit der vorgelegten Abbildung in einfacher Weise verknüpft sind[6]) und bei jedem einzelnen Problem leicht zu ermitteln sein dürften. Dabei tritt die Fixpunktformel als spezieller Satz im Rahmen einer allgemeineren Theorie auf, die sich auf mehrdeutige Abbildungen bezieht und nach Inhalt wie Methode sowohl vom rein topologischen Standpunkt als im Hinblick auf ihre Anwendung auf algebraische Funktionen[7]) von großem Interesse ist.

Im folgenden wird ein von dem ursprünglichen gänzlich verschiedener Beweis der Lefschetzschen Formel mitgeteilt. Er stellt, unter Benutzung nur der einfachsten Tatsachen aus der kombinatorischen Topologie, gewisse elementare Eigenschaften *simplizialer* Abbildungen in den Vordergrund[8]); aus ihnen folgt dann durch eine Approximation der Lefschetzsche Satz, dessen elementarer Ausdruck sie sind.

Der Beweis hat einen engeren Gültigkeitsbereich als der Lefschetzsche, insofern er sich nur auf *eindeutige* Abbildungen bezieht; andererseits ist er allgemeiner, da er nicht nur für Mannigfaltigkeiten, sondern für beliebige *Komplexe*[9]) gilt.

Zusatz bei der Korrektur: Während der Drucklegung gelang es mir, besonders infolge einer Anregung von Fräulein E. Noether, den Beweis des in dieser Arbeit zentralen Satzes I (§ 3) wesentlich zu vereinfachen. Der vereinfachte Beweis erscheint unter dem Titel „Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel“ in einer besonderen Note[9a]), bei deren Kenntnis sich die Lektüre der ersten drei Paragraphen der vorliegenden Arbeit erübrigt.

[6]) Siehe unten, § 2.

[7]) Lefschetz, Intersections ... (s. [5])), No. 72, sowie: Correspondences between algebraic curves, Annals of Math. **28** (1927).

[8]) Satz II (§ 4) und die Sätze des § 5; wegen des elementaren Charakters dieser Sätze vgl. man Fußnote [28]).

[9]) Eine Bemerkung über die Möglichkeit, seine Resultate auf gewisse Abbildungen von Komplexen auszudehnen, macht Lefschetz in der Note: The residual set of a complex on a manifold and related questions, Proceed. of the Nat. Acad. of Sciences U.S.A. **13**, Nr. 8 (1927), § 13. — Fixpunkte bei kleinen Deformationen beliebiger Komplexe sind als Singularitäten von Vektorfeldern in meiner Abhandlung „Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten“, Math. Annalen **96** (1926), behandelt worden. Ich benutze aber die Gelegenheit, um zu betonen, daß der Inhalt dieser Abhandlung, abgesehen von den auf S. 246–249 dargestellten Sätzen IV–VIII, in wesentlich einfacherer Form in der vorliegenden Arbeit enthalten ist.

[9a]) Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-Phys. Klasse. 1928.

§ 1.

Einige bekannte Tatsachen aus der kombinatorischen Topologie.

Bezüglich der in diesem Paragraphen benutzten Definitionen und Beweise wird auf die Darstellungen von Alexander[10]) und Veblen[11]) verwiesen.

a) Die Begriffe „n-Komplex", „i-Kettte", „geschlossene i-Kette", „Homologie" und die Zeichen „$\rightarrow$", „$\sim$" seien wie bei Alexander[12]) erklärt. Eine „geschlossene i-Kette" nennen wir einen „i-Zyklus".

Obere Indizes deuten stets die Dimensionszahl an, griechische Buchstaben bezeichnen, wenn nichts besonders festgesetzt wird, Zyklen, große lateinische Buchstaben Komplexe, kleine lateinische Buchstaben ganze Zahlen.

b) Vorgelegt ist ein C^n. Seine Bettischen oder Zusammenhangszahlen[13]) seien $p^0, p^1, \ldots, p^n$; dabei ist p^0 die Anzahl der Komponenten von C^n. Unter einer „i-ten Bettischen Basis" von C^n verstehen wir ein System von p^i im Sinne der Homologien unabhängigen i-Zyklen $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{p^i}^i$, die Teilkomplexe[14]) von C^n sind; dann gibt es zu jedem i-Zyklus γ^i in C^n ein System von $p^i + 1$ Zahlen $u, u_1, \ldots, u_{p^i}$, so daß

$$u\gamma^i \sim \sum_{j=1}^{p^i} u_j \gamma_j^i$$

ist; diese Zahlen sind bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt.

c) Ist $\nu^i \neq 0$, aber $t\nu^i \sim 0$ für eine gewisse Zahl $t > 1$, so heiße ν^i ein „Nullteiler". Unter den i-ten Bettischen Basen gibt es gewisse, z. B. $\Gamma_1^i, \Gamma_2^i, \ldots, \Gamma_{p^i}^i$, die durch folgende Eigenschaft ausgezeichnet sind[15]): Für jeden γ^i besteht eine Relation

$$\gamma^i \sim \sum_{j=1}^{p^i} u_j \Gamma_j^i + \nu^i,$$

wobei ν^i ein Nullteiler ist; es gibt also eine Zahl t, die nicht von γ^i abhängt, so daß eine Relation

$$t\gamma^i \sim \sum_{j=1}^{p^i} t u_j \Gamma_j^i$$

[10]) Alexander, Combinatorial analysis situs, Transact. Amer. Math. Soc. 28 (1926); im folgenden als „A." zitiert.

[11]) Veblen, The Cambridge Colloquium 1916, II; Analysis situs (1922).

[12]) A. §§ 2, 8, 9.

[13]) A. § 10.

[14]) Ein Teilkomplex von C^n ist ein aus, i. a. mehrfach vorkommenden, Simplexen von C^n gebildeter Komplex.

[15]) Veblen, l. c., S. 117–118.

besteht. Eine solche Basis möge eine „ganze“ Basis, t möge ein „Multiplikator“ der Basis heißen. Die Zahlen u_j sind eindeutig bestimmt.

d) Für $i = n$ haben Homologien eine besonders einfache Bedeutung: $\gamma^n \sim 0$ ist dasselbe wie $\gamma^n = 0$, d. h. in der Darstellung von γ^n als Linearform der n-dimensionalen Simplexe von C^n sind alle Koeffizienten Null[16]). Nullteiler gibt es daher nicht, und jede ganze Basis hat den Multiplikator 1.

e) Alle diese, zunächst unter der Annahme, daß die auftretenden Zyklen Teilkomplexe des C^n sind[14]), ausgesprochenen Tatsachen haben allgemeinere Gültigkeit: erstens dürfen die Zyklen aus Simplexen einer beliebigen Unterteilung von C^n aufgebaut sein; zweitens: da durch derartige Zyklen jedes in C^n liegende eindeutige und stetige Bild $f(\Gamma^i)$ irgendeines Zyklus Γ^i beliebig gut approximiert werden kann, und da je zwei hinreichend benachbarte[17]) Zyklen homolog sind, lassen sich die Homologiebegriffe und -gesetze durch Approximation auf „singuläre“ Zyklen $f(\Gamma^i)$ übertragen. Insbesondere läßt sich jeder singuläre Zyklus in derselben Weise durch dieselben Basen darstellen wie ein gewöhnlicher Zyklus[18]).

f) Die Bettischen Zahlen sind topologische Invarianten von C^n, also unabhängig von der zugrunde gelegten Simplexzerlegung von C^n; d. h.: ist C_1^n mit C^n homöomorph, so haben diese beiden Komplexe die gleichen Bettischen Zahlen[19]). Fällt C_1^n in einer durch den Homöomorphismus gegebenen Weise mit C^n zusammen[20]), so sind die aus Simplexen des C_1^n gebildeten Glieder δ_j^i $(j = 1, 2, \ldots, p^i)$ einer Basis von C_1^n singuläre Zyklen von C^n. Ist dann γ_j^i $(j = 1, 2, \ldots, p^i)$ eine ganze Basis von C^n, so bestehen Relationen

$$t\delta_j^i \sim \sum_{k=1}^{p^i} v_{jk}\, t\gamma_k^i \qquad (j = 1, 2, \ldots, p^i),$$

deren Determinante $|v_{jk}| \neq 0$ ist, da andernfalls zwischen den δ_j^i eine Homologie bestünde.

g) Schließlich sei noch an einen Satz aus der linearen Algebra erinnert: (a_{jk}), (b_{jk}), (v_{jk}) seien quadratische, p-reihige Matrizen, es sei die

---

[16]) Denn sonst müßte es einen $(n+1)$-dimensionalen, von γ^n berandeten Teilkomplex von C^n geben.

[17]) „Nachbarschaft“ zweier Zyklen Γ_1^i, Γ_2^i ist hier so zu verstehen: Γ_1^i, Γ_2^i sind als simpliziale, aus Simplexen von Unterteilungen von C^n bestehende Bilder $f_1(\Gamma_i)$, $f_2(\Gamma_i)$ des Zykels Γ_i gegeben, und das Maß der Nachbarschaft ist das Maximum der Entfernungen $\varrho(f_1(x), f_2(x))$ für die Punkte x von Γ_i.

[18]) Veblen, l. c., S. 118–120.

[19]) A. § 15.

[20]) D. h.: sind C^n, C_1^n verschiedene Triangulierungen desselben als Raum aufgefaßten Komplexes.

Determinante $|v_{jk}| \neq 0$, und es bestehe die Gleichung

$$(a_{jk})(v_{kl}) = (v_{jk})(b_{kl}),$$

d. h.

$$\sum_k a_{jk} \cdot v_{kl} = \sum_k v_{jk} \cdot b_{kl}.$$

Dann haben (a_{jk}) und (b_{jk}) die gleichen Spuren:

$$\sum_j a_{jj} = \sum_j b_{jj}.$$

Ist nämlich (u_{jk}) die — wegen $|v_{jk}| \neq 0$ existierende — zu v_{jk} inverse Matrix, für die also

$$\sum_j u_{ij} v_{jk} = \sum_j v_{kj} u_{ji} = \delta_i^k$$

$$[\delta_i^k = 0 \text{ für } i \neq k, \ \delta_i^i = 1]$$

ist, so folgt

$$\sum_{k,j} a_{jk} \cdot v_{kl} \cdot u_{ij} = \sum_{k,j} u_{ij} \cdot v_{jk} \cdot b_{kl} = \sum_k \delta_i^k b_{kl} = b_{il},$$

$$\sum_i b_{ii} = \sum_{i\,j,k} a_{jk} \cdot v_{ki} \cdot u_{ij} = \sum_{i,j,k} a_{ik} \cdot v_{kj} \cdot u_{ji} = \sum_{i,k} a_{ik} \delta_i^k = \sum_i a_{ii}.$$

§ 2.

Die Lefschetzsche Formel.

C^n sei einer eindeutigen und stetigen Abbildung f auf sich oder einen Teil von sich unterworfen. Ein System von p^i i-Zyklen $\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_{p^i}^i$ heiße eine „f-Basis“, wenn es 1. eine Bettische Basis in C^n oder in einem mit C^n zusammenfallenden homöomorphen Komplex[20]) C_1^n bildet, und wenn 2. für die — im allgemeinen singulären — Bildzyklen $f(\delta_j^i)$ Relationen

$$f(\delta_j^i) \sim \sum_{k=1}^{p^i} a_{jk} \delta_k^i \tag{1}$$

bestehen.

f-Basen existieren stets; denn ist $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{p^i}^i$ eine ganze Basis mit dem Multiplikator t, so ist

$$f(t\gamma_j^i) = t f(\gamma_j^i) \sim \sum_k b_{jk} \cdot t\gamma_k^i; \tag{2}$$

die $t\gamma_j^i$ bilden also eine f-Basis. Insbesondere ist daher jede ganze n-dimensionale Basis eine f-Basis. Jedes Vielfache einer f-Basis ist eine f-Basis.

Zwischen den δ_j^i und den γ_j^i bestehen Relationen (vgl. § 1, f)

$$t\delta_j^i \sim \sum_k v_{jk} t\gamma_k^i, \qquad |v_{jk}| \neq 0; \tag{3}$$

nun folgt einerseits aus (1) und (3)

$$f(t\delta_j^i) \sim \sum_{k,l} a_{jk} v_{kl} t\gamma_l^i, \tag{4}$$

anderseits ergibt Anwendung von f auf beide Seiten von (3) unter Berücksichtigung von (2)

$$f(t\delta_j^i) \sim \sum_{k,l} v_{jk} b_{kl} t\gamma_l^i. \tag{5}$$

Vergleich von (4) und (5) liefert

$$\sum_k a_{jk} v_{kl} = \sum_k v_{jk} b_{kl},$$

und hieraus folgt nach § 1, g

$$\sum_j{}' a_{jj} = \sum_j b_{jj}.$$

Die Spur der Matrix (a_{jk}) ist mithin von der Wahl der f-Basis unabhängig; wir bezeichnen sie durch $S^i f$.

Es gehören also zu der Abbildung f $n+1$ ganzzahlige Konstanten $S^0 f, S^1 f, \ldots, S^n f$. Aus den Definitionen ergibt sich insbesondere, daß $S^0 f$ die Anzahl der in sich übergehenden Komponenten von C^n, und daß im Fall eines geschlossenen C^n $S^n f$ der Brouwersche „Abbildungsgrad“ [3] von f ist.

Nun habe f höchstens endlich viele Fixpunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, und jeder von ihnen liege im Innern eines n-dimensionalen Simplexes; dann lassen sich in bekannter Weise die „Indizes“ (s. § 7) $j_1, j_2, \ldots, j_m$ der Fixpunkte definieren.

Der von Lefschetz für den Fall, daß C^n eine Mannigfaltigkeit ist, bewiesene und im folgenden für einen beliebigen C^n zu beweisende Satz lautet [21]:

$$\sum_{q=1}^{m} j_q = (-1)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot S^i f.$$

§ 3.

Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel.

Unter einer „simplizialen Abbildung“ oder „elementaren Transformation“ von C^n in sich verstehen wir das folgende [22]:

C_1^n sei ein durch Unterteilung der Simplexe von C^n entstandener und also mit C^n homöomorpher Komplex. Jedem Eckpunkt T^0 von C_1^n wird

---

[21] Siehe z. B. Lefschetz, Intersections ... (vgl. [5]), Nr. 71. Das Fehlen des Faktors $(-1)^n$ in der Formel 71.1 rührt von einer unwesentlichen Abweichung in der Definition des Index her.

[22] A. § 5.

ein Eckpunkt $\varphi(T^0)$ von C^n zugeordnet; diese Zuordnung habe die Eigenschaft, daß, falls $T_0^0, T_1^0, \ldots, T_n^0$ die Ecken eines Simplexes von C_1^n bilden, die Punkte $\varphi(T_0^0), \varphi(T_1^0), \ldots, \varphi(T_n^0)$ Ecken — nicht notwendigerweise alle Ecken — eines Simplexes von C^n sind. *Diese, in den Eckpunkten von C_1^n definierte Abbildung φ nennen wir eine simpliziale Abbildung von C^n auf sich* und sagen, daß ihr die Unterteilung C_1^n zugrunde gelegt ist. Auch eine simpliziale Abbildung eines durch Unterteilung von C^n entstandenen Komplexes K^n auf sich, der eine Zerlegung K_1^n von K^n zugrunde gelegt ist, werden wir kurz als simpliziale Abbildung von C^n auf sich bezeichnen.

φ kann zu einer in allen Punkten von C_1^n erklärten eindeutigen und stetigen Abbildung durch die Festsetzung erweitert werden, daß φ in jedem Simplex $T_0^0 T_1^0 \ldots T_n^0$ von C_1^n eine baryzentrische, also insbesondere, falls die Punkte $\varphi(T_j^0)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ sämtlich voneinander verschieden sind, das Bildsimplex also n-dimensional ist, eine affine Abbildung ist. Alle wesentlichen Eigenschaften von φ jedoch sind bereits durch die Eckenzuordnung gegeben, und der Inhalt dieses Paragraphen gehört daher durchaus der kombinatorischen Topologie an[22]).

$T_1^k, T_2^k, \ldots, T_{a^k}^k$ seien die k-dimensionalen Simplexe von C_1^n. Das Bild $\varphi(T_i^k)$ ist ein höchstens k-dimensionales Simplex von C^n, das in Simplexe von C_1^n zerlegt ist, und daher in der Form

$$\varphi(T_i^k) = \sum_{j=1}^{a^k} c_{ij}^k T_j^k \tag{1}$$

darstellbar; dabei sind für jedes T_i^k die c_{ij}^k entweder alle 0 — dies tritt ein, wenn $\varphi(T_i^k)$ zu einem Simplex von weniger als k Dimensionen entartet ist — oder teils 0 und teils $+1$, oder teils 0 und teils -1. Für den Fall $k = 0$ setzen wir fest, daß die Zahlen c_{ij}^0 nicht -1 sein sollen.

Zu φ gehören also $n+1$ quadratische Matrizen (c_{ij}^k) $(k = 0, 1, \ldots, n+1;$ $i, j = 1, 2, \ldots, a^k)$. Besondere Beachtung verdienen die in den Hauptdiagonalen stehenden Zahlen c_{ii}^k: ist $c_{ii}^k = 0$, so ist T_i^k nicht in $\varphi(T_i^k)$ enthalten, T_i^k und $\varphi(T_i^k)$ haben also keinen inneren Punkt gemeinsam. Ist dagegen $c_{ii}^k = \pm 1$, so ist T_i^k ein Teilsimplex des Simplexes $\varphi(T_i^k)$ von C^n. In diesem Fall wird also T_i^k von seinem affinen Bild $\varphi(T_i^k)$ bedeckt, und zwar in positivem oder negativem Sinne, je nachdem $c_{ii}^k = +1$ oder $= -1$ ist.

Das Ziel dieses Paragraphen ist die Feststellung des folgenden Zusammenhanges zwischen den Spuren dieser Matrizen und den Konstanten $S^k\varphi$:

Satz I.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \sum_{i=1}^{a^k} c_{ii}^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S^k \varphi. \tag{2}$$

Bemerkung. Satz I geht in die Euler-Poincarésche Formel [23])

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^k \tag{2a}$$

über, wenn $C_1^n = C^n$ und φ die Identität ist; denn dann ist $c_{ii}^k = 1$ und in der Bezeichnung des § 2 $b_{ll} = 1$, also $S^k\varphi = p^k$.

Der Beweis von Satz I beruht auf folgendem

Hilfssatz. Sind C^{n-1} und C_1^{n-1} die aus den $(n-1)$-dimensionalen Simplexen von C^n bzw. C_1^n gebildeten Komplexe, und ist φ' die unter Zugrundelegung der Unterteilung C_1^{n-1} von C^{n-1} durch φ definierte simpliziale Abbildung von C^{n-1} auf sich, so ist

$$S^{n-1}\varphi' = S^{n-1}\varphi - S^n\varphi + \sum_{i=1}^{a''} c_{ii}^n. \tag{3}$$

Beweis des Hilfssatzes. a) Sind r^k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ die Bettischen Zahlen von C^{n-1}, so ist $r^k = p^k$ für $k = 0, 1, \ldots, n-2$, da alle Berandungsrelationen der Komplexe von höchstens $n-1$ Dimensionen in C^n bereits auf C^{n-1} gelten. Die Euler-Poincarésche Formel für C_1^{n-1} lautet daher

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^k = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k p^k + (-1)^{n-1} r^{n-1}.$$

Subtrahiert man sie von der analogen Formel (2a) für C_1^n, so erhält man

$$\begin{gathered}(-1)^n a^n = (-1)^{n-1} p^{n-1} + (-1)^n p^n - (-1)^{n-1} r^{n-1}, \\ r^{n-1} = p^{n-1} - p^n + a^n.\end{gathered} \tag{3a}$$

Wir setzen

$$q = a^n + p^{n-1} = p^n + r^{n-1}.$$

Es seien nun

$$\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}, \ldots, \Gamma_{a^n}^{n-1} \tag{4a}$$

die Randsphären der Simplexe T_i^n;

$$\Gamma_{a^n+1}^{n-1}, \Gamma_{a^n+2}^{n-1}, \ldots, \Gamma_q^{n-1} \tag{4b}$$

die Glieder einer $(n-1)$-ten Bettischen Basis in C_1^n;

$$\Delta_1^n, \Delta_2^n, \ldots, \Delta_{p^n}^n \tag{5a}$$

die Glieder einer n-ten Bettischen Basis in C_1^n;

$$\Delta_{p^n+1}^{n-1}, \Delta_{p^n+2}^{n-1}, \ldots, \Delta_q^{n-1} \tag{5b}$$

die Glieder einer $(n-1)$-ten Bettischen Basis in C_1^{n-1}.

[23]) A. § 10, Formel 10.6.

Dabei sei (4b) φ-Basis und ein Vielfaches einer „ganzen" Basis, (5a) eine ganze Basis. (5b) sei so gewählt, daß

$$(6) \qquad \Delta_i^{n-1} \sim \sum_{j=a^n+1}^{q} v_{ij} \Gamma_j^{n-1} \quad (i = p^n+1, \ldots, q) \quad [\text{in } C_1^n]$$

sei; dies läßt sich (vgl. § 1, c), da (4b) Vielfaches einer ganzen Basis ist, durch Multiplikation einer beliebigen (5b)-Basis mit einer Konstanten stets erreichen; bei dieser Multiplikation bleibt die Eigenschaft von (5b), φ-Basis zu sein, erhalten.

b) Ist

$$(7) \qquad \Delta_i^n = \sum_{j=1}^{a^n} v_{ij} T_j^n \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n),$$

so besagt die Geschlossenheit von Δ_i^n, daß

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{a^n} v_{ij} \Gamma_j^{n-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n)$$

ist. Setzen wir weiter

$$(9) \qquad v_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n;\ j = a^n+1, \ldots, q)$$

und

$$(10a) \qquad L_i(x_1, x_2, \ldots, x_q) = \sum_{j=1}^{q} v_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n),$$

worin die x_j unabhängige Veränderliche sind, so wird aus (7) und (8):

$$(7') \qquad L_i(T_1^n, T_2^n, \ldots, T_{a^n}^n, x_{a^n+1}, \ldots, x_q) = \Delta_i^n$$

$$(8') \qquad L_i(\Gamma_1^n, \Gamma_2^n, \ldots, \Gamma_{a^n}^n, x_{a^n+1}, \ldots, x_q) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n)$$

mit willkürlichen $x_{a^n+1}, \ldots, x_q$.

c) (6) sagt aus, daß in C_1^n Komplexe

$$K_i^n = \sum_{j=1}^{a^n} v_{ij} T_j^n \qquad (i = p^n+1, p^n+2, \ldots, q)$$

existieren, die durch

$$\Delta_i^{n-1} - \sum_{j=a^n+1}^{q} v_{ij} \Gamma_j^{n-1}$$

berandet werden, daß also

$$\Delta_i^{n-1} - \sum_{j=a^n+1}^{q} v_{ij} \Gamma_j^{n-1} = \sum_{j=1}^{a^n} v_{ij} \Gamma_j^{n-1} \quad (i = p^n+1, \ldots, q)$$

ist. Führen wir die Bezeichnung

$$(10b) \qquad L_i(x_1, x_2, \ldots, x_q) = \sum_{j=1}^{q} v_{ij} x_j \qquad (i = p^n+1, \ldots, q)$$

ein, so ist demnach

$$(11) \qquad L_i(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}, \ldots, \Gamma_q^{n-1}) = \Delta_i^{n-1} \qquad (i = p^n+1, \ldots, q).$$

d) Nach (8) ist insbesondere

$$L_i(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}, \ldots, \Gamma_q^{n-1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n). \tag{8''}$$

Wir wollen zeigen, daß dies im wesentlichen die einzigen zwischen den Γ_j^{n-1} bestehenden Relationen sind, d. h. wir behaupten: Ist $\sum_{j=1}^{q} b_j \Gamma_j^{n-1} = 0$, so ist $\sum_{j=1}^{q} b_j x_j$ eine lineare Verbindung der $L_i(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ $(i = 1, 2, \ldots, p^n)$.

In der Tat: Aus

$$\sum_{j=1}^{q} b_j \Gamma_j^{n-1} = 0$$

und

$$\Gamma_j^{n-1} \sim 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, a^n) \qquad [\text{in } C_1^n]$$

folgt

$$\sum_{j=a^n+1}^{q} b_j \Gamma_j^{n-1} \sim 0,$$

also, da (4b) eine Basis in C_1^n ist,

$$b_j = 0 \qquad (j = a^n + 1, \ldots, q), \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{a^n} b_j \Gamma_j^{n-1} = 0,$$

d. h. $\Gamma^n = \sum_{j=1}^{a^n} b_j T_j^n$ ist ein Zyklus, also, da (5a) eine ganze Basis ist, eine lineare Verbindung der Δ_i^n $(i = 1, 2, \ldots, p^n)$ [24]). Die Zahlenreihe $b_1, b_2, \ldots, b_{a^n+1}$ ist mithin eine lineare Verbindung der Zahlenreihen $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ia^n}$ $(i = 1, 2, \ldots, p^n)$. Zusammen mit (12) und (9) bedeutet dies, daß $\sum_{j=1}^{q} b_j x_j$ eine lineare Verbindung der Formen $L_1, L_2, \ldots, L_{p^n}$ ist.

e) Die q Linearformen (10a), (10b) sind linear unabhängig. Denn aus $\sum_{i=1}^{q} c_i L_i(x_1, \ldots, x_q) = 0$ folgt, wenn man x_j durch Γ_j^{n-1} ersetzt, auf Grund von d): $c_i = 0$ $(i = p^n + 1, \ldots, q)$; aus $\sum_{i=1}^{p^n} c_i L_i(x_1, \ldots, x_q) = 0$ folgt weiter, wenn man x_j für $j = 1, 2, \ldots, p^n$ durch T_j^n ersetzt, auf Grund von (7'): $\sum_{i=1}^{p^n} c_i \Delta_i^n = 0$, also, da (5a) eine Basis ist [24]): $c_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p^n)$. Mithin sind die L_i linear unabhängig, d. h. es ist die Determinante

$$|v_{ij}| \neq 0. \tag{13}$$

[24]) Nach § 1, d bedeuten hier Gleichungen und Homologien dasselbe.

f) Wie werden die Γ_j^{n-1} durch φ' transformiert?

Wenn wir $c_{ij}^n = c_{ij}$ $(i, j \leqq a^n)$ setzen, so folgt aus (1) und der Definition von (4a)

$$\varphi'(\Gamma_i^{n-1}) = \sum_{j=1}^{a^n} c_{ij} \Gamma_j^{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, a^n).$$

Da (4b) eine φ-Basis ist, bestehen Homologien

$$\varphi(\Gamma_i^{n-1}) \sim \sum_{j=a^n+1}^{q} c_{ij} \Gamma_j^{n-1} \qquad (i = a^n + 1, \ldots, q) \quad [\text{in } C_1^n],$$

also ist — man vergleiche die Herleitung von (11) aus (6) in c) —

$$\varphi(\Gamma_i^{n-1}) = \sum_{j=1}^{q} c_{ij} \Gamma_i^{n-1} \qquad (i = a^n + 1, \ldots, q),$$

wobei $\sum_{i=a^n+1}^{q} c_{ii} = S^{n-1}\varphi$ ist. Setzt man noch

$$c_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, a^n;\ j = a^n + 1, \ldots, q), \tag{14}$$

so erleiden bei Ausführung von φ oder φ' die Γ_j^{n-1} die folgende Transformation in sich:

$$\varphi'(\Gamma_i^{n-1}) = \sum_{j=1}^{q} c_{ij} \Gamma_i^{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q); \tag{15}$$

die Spur der Transformationsmatrix ist

$$\sum_{i=1}^{q} c_{ii} = \sum_{i=1}^{a^n} c_{ii}^n + S^{n-1}\varphi. \tag{16}$$

g) Wie transformieren sich die L_i, wenn die x_j die Substitution

$$\bar{x}_j = \sum_{k=1}^{q} c_{jk} x_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, q) \tag{17}$$

erleiden, d. h. was läßt sich über

$$L_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q) = \sum_{j,k=1}^{q} v_{ij} c_{jk} x_k \tag{18}$$

aussagen?

Mit Rücksicht auf (9) und (14) ist für $i \leqq p^n$

$$L_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q) = \sum_{j,k=1}^{a^n} v_{ij} c_{jk} x_k,$$

also nach (1) und (7)

$$L_i(\bar{T}_1^n, \bar{T}_2^n, \ldots, \bar{T}_{a^n}, \bar{x}_{a^n+1}, \ldots \bar{x}_q) = \sum_{j,k=1}^{a^n} v_{ij} c_{jk}^n T_k^n$$

$$= \sum_{j=1}^{a^n} v_{ij} \cdot \varphi(T_j^n) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{a^n} v_{ij} T_j^n\Big) = \varphi(\Delta_i^n).$$

Da die Δ_i^n eine φ-Basis sind, ist [24])

$$\varphi(\Delta_i^n) = \sum_{j=1}^{p^n} b_{ij}\,\Delta_j^n \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n), \tag{19a}$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{p^n} b_{ii} = S^n\varphi \tag{20a}$$

ist. Es folgt mit Hilfe von (7)

$$L_i(\bar{T}_1^n, \bar{T}_2^n, \ldots, \bar{T}_{a^n}^n, \bar{x}_{a^n+1}, \ldots, \bar{x}_q) = \sum_{j=1}^{p^n} b_{ij}\,\Gamma_j^n = \sum_{j=1}^{p^n}\sum_{k=1}^{a^n} b_{ij}\,v_{jk}\,T_k^n,$$

und mit Hilfe von (9) und (10a)

$$L_i(\bar{T}_1^n, \ldots, \bar{T}_{a^n}, \bar{x}_{a^n+1}, \ldots, \bar{x}_q) = \sum_{j=1}^{p^n} b_{ij}\,L_j(T_1^n, \ldots, T_{a^n}^n, x_{a^n+1}, \ldots, x_q).$$

Da aber zwischen den T_k^n keine Relation besteht, ist dies eine Identität, d. h. es ist, wenn wir noch

$$b_{ij} = 0 \qquad (i \leqq p^n;\ j > p^n)$$

setzen:

$$L_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q) = \sum_{j=1}^{q} b_{ij}\,L_j(x_1, x_2, \ldots, x_q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p^n). \tag{21a}$$

Nun sei $i > p^n$; dann ist mit Rücksicht auf (18), (15) und (11)

$$L_i(\bar{\Gamma}_1^{n-1}, \bar{\Gamma}_2^{n-1}, \ldots, \bar{\Gamma}_q^{n-1}) = \sum_{j,k=1}^{q} v_{ij}\,c_{jk}\,\Gamma_k^{n-1} = \sum_{j=1}^{q} v_{ij}\,\varphi'(\Gamma_i^{n-1})$$

$$= \varphi'\Big(\sum_{j=1}^{q} v_{ij}\,\Gamma_j^{n-1}\Big) = \varphi'(\Delta_i^{n-1}).$$

Da die Δ_i^{n-1} eine φ'-Basis in C_1^{n-1} sind, ist [24])

$$\varphi'(\Delta_1^{n-1}) = \sum_{j=p^n+1}^{q} b_{ij}\,\Delta_j^{n-1}, \tag{19b}$$

wobei

$$\sum_{i=p^n+1}^{q} b_{ii} = S^{n-1}\varphi' \tag{20b}$$

ist. Es folgt mit Hilfe von (11)

$$L_i(\bar{\Gamma}_1^{n-1}, \bar{\Gamma}_2^{n-1}, \ldots, \bar{\Gamma}_q^{n-1}) - \sum_{j=p^n+1}^{q} b_{ij}\,L_j(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}, \ldots, \Gamma_q^{n-1}) = 0.$$

Nach d) ist die linke Seite, wenn man Γ_j^{n-1} durch x_j ersetzt, eine lineare Verbindung von $L_1, L_2, \ldots, L_{p^n}$; d. h. es ist

$$L_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q) = \sum_{j=1}^{q} b_{ij}\,L_j(x_1, x_2, \ldots, x_q) \qquad (i = p^n+1, \ldots, q). \tag{21b}$$

(21a) und (21b) sind die gesuchten Transformationen; dabei ist wegen (20a) und (20b) die Spur der Transformationsmatrix

$$\sum_{i=1}^{q} b_{ii} = S^n \varphi + S^{n-1} \varphi'. \tag{22}$$

h) Einsetzen von (18), (10a), (10b) in (21a), (21b) liefert

$$\sum_{j,k} v_{ij} c_{jk} x_k = \sum_{j,k} b_{ij} v_{jk} x_k,$$

also

$$\sum_{j} v_{ij} c_{jk} = \sum_{j} b_{ij} v_{jk}.$$

Mit Rücksicht auf (13) folgt daher nach § 1, g, $\sum_{i=1}^{q} c_{ii} = \sum_{i=1}^{q} b_{ii}$, also nach (16) und (22)

$$\sum_{i=1}^{a^n} c_{ii}^n + S^{n-1} \varphi = S^n \varphi + S^{n-1} \varphi'.$$

Damit ist der durch (3) ausgedrückte Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Satzes I: (2) ist für $n = 0$ richtig; denn in diesem Fall besteht C^n aus endlich vielen Punkten, und sowohl die linke Seite $\sum c_{ii}^0$ als die rechte Seite $S^0 \varphi$ ist nach Definition gleich der Anzahl der bei φ festbleibenden unter diesen Punkten.

(2) sei für die Dimensionszahl $n-1$ bewiesen. Dann ist insbesondere für die Abbildung φ'

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{i=1}^{a^k} c_{ii}^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^n S^k \varphi'. \tag{23}$$

Es ist

$$S^k \varphi' = S^k \varphi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \tag{24}$$

da für Homologien zwischen höchstens $(n-2)$-dimensionalen Komplexen die Unterscheidung zwischen C^n und C^{n-1} keine Rolle spielt.

Setzt man auf der rechten Seite von (23) für die $S^k \varphi'$ die durch (24) und (3) gegebenen Werte ein, so geht (23) in (2) über. Damit ist Satz I bewiesen.

Korollar: Ist $c_{ii}^k = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $i = 1, 2, \ldots, a^k$, so ist

$$\sum_{i=1}^{a^n} c_{ii}^k = (-1)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S^k \varphi. \tag{25}$$

Die Ähnlichkeit dieser Formel mit der zu beweisenden Fixpunktformel (§ 2) läßt den Weg erkennen, auf dem die letztere erreicht werden wird: Sätze IVa, b, c (§ 5) — Satz V (§ 6) — Satz VIIa (§ 8). Der zunächst folgende § 4 ist für das Erreichen des Zieles logisch nicht notwendig; trotzdem dürfte es von Interesse sein, die in ihm enthaltenen Sätze II und III möglichst schnell, also schon an dieser Stelle, zu beweisen.

§ 4.

Ein Existenzsatz für Fixpunkte und sein kombinatorischer Ausdruck.

Es gelten die Definitionen und Bezeichnungen des vorigen Paragraphen, φ sei also eine simpliziale Abbildung von C^n auf sich, der die Unterteilung C_1 zugrunde liegt.

Satz II (*Kombinatorischer Ausdruck des Existenzsatzes*): *Ist*

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S^k \varphi \neq 0,$$

so gibt es wenigstens einen Eckpunkt T_j^0 von C_1^n, der demselben Simplex von C^n angehört wie sein Bild $\varphi(T_j^0)$, der also durch φ höchstens um das Maximum der Durchmesser der Simplexe von C^n verschoben wird.

Beweis: Aus (1) und Satz I folgt, daß wenigstens eine der Zahlen $c_{ii}^k \neq 0$ ist, daß also wenigstens ein Simplex T_i^k in seinem Bild $\varphi(T_i^k)$ enthalten ist. Da $\varphi(T_i^k)$ ein Simplex von C^n ist, haben die Ecken von T_i^k die behauptete Eigenschaft.

Beispiel: C^n sei ein zusammenhängender Komplex, in dem es für $i > 0$ keine Basen gibt, also z. B. einem Simplex homöomorph; dann gilt für jede simpliziale Abbildung von C^n auf sich die Aussage von Satz II, da stets

$$S^0 \varphi = 1, \qquad S^k \varphi = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k S^k \varphi = 1$$

ist[25].

Satz III (Existenzsatz): *Ist f eine eindeutige und stetige Abbildung von C^n auf sich und ist*

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S^k f \neq 0,$$

so besitzt f wenigstens einen Fixpunkt.

Beweis. Ist $\bar{C}^n$ eine hinreichend feine Unterteilung von C^n, $\bar{C}_1^n$ eine hinreichend feine Unterteilung von $\bar{C}_1^n$, so läßt sich eine simpliziale, den Ecken von $\bar{C}_1^n$ Ecken von $\bar{C}^n$ zuordnende Abbildung $\bar{\varphi}$ von $\bar{C}^n$ auf sich angeben, die f beliebig gut approximiert[26]. Bezeichnet $\varrho(x, y)$ die

[25] Der hierin enthaltene kombinatorische Ausdruck des Fixpunktsatzes für das Simplex sowie die Aufgabe, ihn elementar, also ohne Stetigkeitsbetrachtungen und insbesondere ohne Benutzung des Fixpunktsatzes selbst, zu beweisen, wurde schon vor längerer Zeit von Herrn Alexandroff formuliert.

[26] A. § 6. — Zum ersten Male sind simpliziale Approximationen von Abbildungen von Brouwer, l. c., benutzt worden.

zu einer bestimmten Metrik von C^n gehörige Entfernungsfunktion, ε eine beliebige positive Zahl, $\bar{d}$ das Maximum der Durchmesser der Simplexe von $\bar{C}^n$, so kann man d so klein und die durch $\bar{\varphi}$ gelieferte Approximation so gut wählen, daß

$$\bar{d} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

$$\varrho(\bar{\varphi}(x),\ f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad [x < C^n], \tag{4}$$

$$S^k \bar{\varphi} = S^k f \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{5}$$

ist; dabei gilt (5) infolge der in § 1, e und Fußnote [17]) gemachten Bemerkung über benachbarte Zyklen. Aus Satz II und (5) folgt die Existenz eines Punktes x_ε für den

$$\varrho(x_\varepsilon,\ \bar{\varphi}(x_\varepsilon)) < \bar{d},$$

für den also nach (3)

$$\varrho(x_\varepsilon,\ \bar{\varphi}(x_\varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und nach (4)

$$\varrho(x_\varepsilon,\ f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$$

ist. Da ε willkürlich ist, hat daher $\varrho(x, f(x))$ die untere Grenze 0; wegen der Kompaktheit von C^n wird diese in einem Punkt x_0 erreicht, und dieser ist Fixpunkt.

§ 5.[27])

Die Fixpunktformel für simpliziale Abbildungen.

Jede eindeutige und stetige Abbildung f eines k-dimensionalen Simplexes auf sich besitzt nach Satz III einen Fixpunkt, da — vgl. die Behandlung des „Beispieles“ zu Satz II — für eine solche Abbildung

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j S^j f = 1$$

ist. Insbesondere gilt also

Hilfssatz A: Jede affine Abbildung ψ eines Simplexes T auf sich besitzt wenigstens einen Fixpunkt.

Hilfssatz A läßt sich verschärfen zu

Hilfssatz B: Besitzt ψ keinen Fixpunkt auf dem Rande von T, so gibt es in T *genau* einen Fixpunkt.

[27]) In der in Fußnote [1]) genannten Note wird der allgemeine Fixpunktsatz (VIIa dieser Arbeit) mit Hilfe eines Kunstgriffs unmittelbar auf den Satz III des vorigen Paragraphen zurückgeführt, ohne daß auf den Inhalt unserer §§ 5, 6 eingegangen wird. Der in der vorliegenden Arbeit eingeschlagene Weg ist zwar länger, aber natürlicher — vgl. den am Schluß des § 3 angedeuteten Gedankengang — und führt überdies auch zu Satz VII b.

Beweis: Gäbe es in T zwei Fixpunkte x, y, so würde deren Verbindungsgerade affin in sich transformiert, und es blieben daher wegen der Existenz zweier Fixpunkte alle ihre Punkte, insbesondere ihre Schnittpunkte mit dem Rande von T, fest[28]).

Hilfssatz C: Ist das Simplex T^k in dem durch die affine Abbildung φ gelieferten Bild $U = \varphi(T^k)$ enthalten und liegt auf dem Rande von T^k kein Fixpunkt, so gibt es in T^k genau einen Fixpunkt.

Beweis: Aus $T^k \subset U$ folgt, daß U nicht entartet, sondern k-dimensional ist, daß also eine zu φ inverse affine Abbildung $\psi = \varphi^{-1}$ existiert. φ und ψ haben dieselben Fixpunkte. Da ψ den Rand von U auf den Rand von T^k abbildet und dort nach Voraussetzung kein Fixpunkt liegt, liegt auch auf dem Rande von U kein Fixpunkt. Mithin folgt C aus B.

Definition *des „Index" eines Fixpunktes bei speziellen affinen Abbildungen*: Erfüllen φ und T^k die Voraussetzungen des Hilfssatzes C, so legen wir dem auf Grund dieses Hilfssatzes existierenden Fixpunkt den „Index" $+1$ oder -1 bei, je nachdem T^k von $U^k = \varphi(T^k)$ positiv oder negativ bedeckt wird, d. h. je nachdem die Determinante von φ positiv oder negativ ist.

Definition *der „Regularität" eines Fixpunktes und einer Abbildung*: Ein Fixpunkt der eindeutigen und stetigen Abbildung f von C^n auf sich heiße „regulär" (in bezug auf eine bestimmte Zerlegung von C^n in Simplexe), wenn er im Inneren eines n-dimensionalen Simplexes von C^n liegt und wenn es in einer gewissen Umgebung von ihm keinen weiteren Fixpunkt gibt. Die Abbildung f heiße „regulär", wenn sie keine anderen als reguläre Fixpunkte besitzt.

Satz IVa. *Die simpliziale Abbildung φ ist dann und nur dann regulär, wenn $c_{ii}^k = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $i = 1, 2, \ldots, a^k$ ist.*

Beweis: Ist $c_{ii}^k \neq 0\,(k < n)$, so ist $T_i^k \subset \varphi(T_i^k)$, und aus Hilfssatz A, angewandt auf φ^{-1} — vgl. den Beweis von Hilfssatz C —, folgt die Existenz eines Fixpunktes ξ in $\varphi(T_i^k)$. Da $\varphi(T_i^k)$ ein k-dimensionales Simplex von C^n ist, ist φ nicht regulär.

Sei andererseits $c_{ii}^k = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ und $i = 1, 2, \ldots, a^k$; sei ferner ξ ein Fixpunkt und T_i^k unter den Simplexen von C_1^n, denen ξ angehört, eines niedrigster Dimensionenzahl. Dann ist ξ innerer Punkt

[28]) Die Hilfssätze A und B treten hier als Folgerungen aus Satz III auf, der wesentlich auf Stetigkeitsbegriffen beruht; sie lassen sich aber auch elementar, d. h. ohne jegliche Stetigkeitsbetrachtung, beweisen. Ein solcher Beweis wird im „Anhang I" angegeben werden; er dürfte aus methodischen Gründen erwünscht sein, da seine Möglichkeit den elementaren Charakter der im folgenden aufzustellenden Sätze IVa, b, c, die sich aus den beiden Hilfssätzen und Satz I ergeben werden, klarstellt.

von T_i^k, also haben die Simplexe T_i^k von C_1'' und $\varphi(T_i^k)$ von C^n einen inneren Punkt gemein, es ist mithin $T_i^k < \varphi(T_i^k)$, $c_{ii}^k \neq 0$, $k = n$. Die Fixpunkte von f liegen also im Inneren der T_i^n, und hieraus folgt nach Hilfssatz C, daß jedes T_i^n höchstens einen Fixpunkt enthält.

Damit ist IVa bewiesen. Aus dem Beweis ergibt sich weiter auf Grund der Definition des „Index“

Satz IVb: *Die Fixpunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ einer regulären simplizialen Abbildung φ liegen stets in voneinander verschiedenen Simplexen $T_{i_1}^n, T_{i_2}^n, \ldots, T_{i_m}^n$. Ihre Indizes sind definiert; sind diese $j_1, j_2, \ldots, j_m$, so ist $c_{i_q i_q}^n = j_q$ $(q = 1, 2 \ldots, m)$, dagegen ist $c_{ii}^n = 0$, wenn T_i^n keinen Fixpunkt enthält.*

Aus IVa und IVb folgt nach Satz I (vgl. insbesondere § 3, (25),)

Satz IVc (*Fixpunktformel für reguläre simpliziale Abbildungen*):

$$\sum_{q=1}^{m} j_q = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S^k \varphi .$$

§ 6.

Ein Approximationssatz.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Nachweis, daß sich jede Abbildung eines Komplexes auf sich durch *reguläre* simpliziale Abbildungen beliebig gut approximieren läßt. Wir schicken einige elementare Hilfsbetrachtungen voraus.

a) Es sei K^n ein Komplex und K^k der Komplex seiner k-dimensionalen Simplexe $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Unterteilungen $\bar{K}^k$ der K^k heißen „baryzentrische“ Zerlegungen, wenn sie folgende Eigenschaften haben[29]):

Es ist $\bar{K}^0 = K^0$; $\bar{K}^{k-1}$ sei definiert; dann wählen wir in jedem k-dimensionalen Simplex U_j^k von K^k einen inneren Punkt y_j und zerlegen U_j^k in Teilsimplexe, indem wir y_j mit den auf dem Rande von U_j^k liegenden Simplexen von $\bar{K}^{k-1}$ verbinden. Diese Zerlegungen der U_j^k bilden $\bar{K}^k$. Die so entstehenden Komplexe $\bar{K}^0, \bar{K}^1, \ldots, \bar{K}^n$ mögen „(zusammengehörige) baryzentrische Zerlegungen“ der $K^0, K^1, \ldots, K^n$ heißen.

Die der Reihe nach für $k = 1, 2, \ldots, n$ ausgeführte Konstruktion der $\bar{K}^k$ zeigt unmittelbar die Gültigkeit von

Hilfssatz A: Der Durchschnitt des Simplexes U^k von $\bar{K}^k$ mit K^i $(i \leqq k)$ ist ein Simplex $\bar{U}^i$, das Randsimplex von U^k und Simplex von $\bar{K}^i$ ist.

Wir betrachten nun einen durch Unterteilung von $\bar{K}^n$ entstandenen Komplex K_1^n und bezeichnen durch T_j^k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ stets dessen Simplexe.

[29]) Vgl. die „regulären“ Unterteilungen bei Veblen, l. c., S. 85 ff.

Ist ein solches T^k Teil des Simplexes U^n von K^n, so ist der Durchschnitt $T^k \cdot K^i$ in dem Durchschnitt $U^n \cdot K^i$ enthalten, und dieser ist nach Hilfssatz A ein Randsimplex $\bar{U}^i$ von U^n. Mithin ist $T^k \cdot K^i = T^k \cdot \bar{U}^i$, und hieraus ergibt sich

Hilfssatz B: Der Durchschnitt $T^k \cdot K^i$ ist entweder leer oder ein h-dimensionales Randsimplex von $T^k (0 \leqq h \leqq i, k)$.

b) Mit IT^k sei im folgenden das Innengebiet von T^k bezeichnet.

Das Simplex T^i gehöre den Simplexen T_j^k an $(0 \leqq i \leqq k \leqq n;$ $j = 1, \ldots, m^k)$. Wir nennen $\sum_{j,k} IT_j^k = \mathfrak{S}(T^i)$ den zu T^i gehörigen „Stern". $\sum_{j,k} T_j^k = \sum_{j=1}^{m^n} T_j^n = \overline{\mathfrak{S}(T^i)}$ ist seine abgeschlossene Hülle. Seine „Randsimplexe" sind diejenigen T^l, die zu einem T_j^k gehören, ohne T^i zu enthalten.

Hilfssatz C: Ist $T^i \subset K^i$, so ist $K^i \cdot \mathfrak{S}(T^i) = IT^i$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{S}(T^i) = \sum_{j,k} IT_j^k$, $K^i \cdot \mathfrak{S}(T^i) = \sum_{j,k} K^i \cdot IT_j^k \subset \sum_{j,k} K^i \cdot T_j^k$. Nach Hilfssatz B besteht $K^i \cdot T_j^k$ aus einem (höchstens i-dimensionalen) Simplex; da $T^i \subset K^i \cdot T_j^k$ ist, ist daher $K^i \cdot T_j^k = T^i$, $\sum K^i \cdot T_j^k = T^i$, $K^i \cdot \mathfrak{S}(T^i) \subset T^i$. Hieraus und aus $IT^i \subset K^i \cdot \mathfrak{S}(T^i)$ folgt, da $\mathfrak{S}(T^i)$ keinen Randpunkt von T^i enthält, $K^i \cdot \mathfrak{S}(T^i) = IT^i$.

Hilfssatz D: Ist $T^i \subset K^i$, $j < i$, so ist $K^j \cdot \mathfrak{S}(T^i) = 0$.

Beweis: $K^j \subset K^i$, $K^j \cdot \mathfrak{S}(T^i) \subset K^i \cdot \mathfrak{S}(T^i) = IT^i$,
$K^j \cdot \mathfrak{S}(T^i) \subset K^j \cdot IT^i = 0$.

Hilfssatz E: Ist $T_1^i \subset K^i$, $T_2^i \subset K^i$, $T_1^i \neq T_2^i$, so ist $\mathfrak{S}(T_1^i) \cdot \mathfrak{S}(T_2^i) = 0$.

Beweis: Zu jedem Punkte x gibt es genau ein T_x^k, so daß $x \subset IT_x^k$ ist. Wäre nun $x \subset \mathfrak{S}(T_1^i)$ und $x \subset \mathfrak{S}(T_2^i)$, so wäre $IT_x^k \subset \mathfrak{S}(T_1^i)$ und $IT_x^k \subset \mathfrak{S}(T_2^i)$, also $T_1^i \subset T_x^k$ und $T_2^i \subset T_x^k$, $i \leqq k$, $T_1^i + T_2^i \subset K^i \cdot T_x^k$, entgegen Hilfssatz B.

c) Unter einer „kanonischen" Zerlegung von $\mathfrak{S}(T^i)$ soll folgendes verstanden werden: $T_j^k (j = 1, 2, \ldots, m^k;$ $k = i+1, i+2, \ldots, n)$ seien die T^i enthaltenden Simplexe. Im Inneren von T^i wählen wir einen Punkt z^* und verbinden ihn mit den Randsimplexen von T^i; dadurch wird T^i in einen Komplex D^i zerlegt. Dann wählen wir in jedem T_j^{i+1} $(j = 1, 2, \ldots, m^{i+1})$ einen inneren Punkt z_j^{i+1} und verbinden ihn mit den Randsimplexen von T_j^{i+1} und mit den Simplexen von D^i; dadurch wird $\sum_j T_j^{i+1}$ in einen Komplex D^{i+1} zerlegt. Durch Einführung neuer Ecken z_j^k $(k = i+2, \ldots, n)$ gelangen wir so fortfahrend zu einer Unterteilung D^n von $\sum_{j=1}^{m^n} T_j^n = \mathfrak{S}(T^i)$. Mit den Randsimplexen von $\mathfrak{S}(T^i)$ ist keine Unter-

teilung vorgenommen worden. D^n ist daher eine Unterteilung von $\mathfrak{S}(T^i)$ — sie heiße „kanonisch" —, die zusammen mit $K_1^n - \mathfrak{S}(T^i)$ einen Komplex K_2^n bildet, der eine Unterteilung von K_1^n ist.

Bei der Konstruktion von D^n ist z^* mit den Punkten z_j^k und mit den Eckpunkten von T^i, jedoch mit keinem anderen auf dem Rande von $\mathfrak{S}(T^i)$ liegenden Eckpunkt verbunden worden. Keiner der letztgenannten Punkte gehört daher zusammen mit z^* zu einem Simplex von D^n. Daraus ergibt sich die Einteilung der n-dimensionalen Simplexe von D^n in zwei Arten: diejenigen „erster Art", deren Eckpunkte z^*, gewisse z_j^k und gewisse Ecken von T^i sind, und diejenigen „zweiter Art", denen z^* nicht angehört. Ihre Ecken sind teils z_j^k, teils Ecken eines Randsimplexes eines $T_j^n (j = 1, 2, \ldots, m^n)$.

d) K_1^n sei wie bisher durch eine Unterteilung einer baryzentrischen Zerlegung von K^n entstanden; mit U^k seien weiter die Simplexe von K^n, mit T^k die von K_1^n bezeichnet.

Hilfssatz F: Ist ψ eine simpliziale Abbildung von K^n auf sich, der die Zerlegung K_1^n zugrunde gelegt ist, d. h. die den Ecken von K_1^n Ecken von K^n zuordnet, und ist d das Maximum der Durchmesser der Simplexe von K^n, so gibt es eine *reguläre* simpliziale Abbildung φ von K^n auf sich, die von ψ um höchstens $2nd$ abweicht [d. h. $\varrho(\varphi(x), \psi(x)) \leqq 2nd$ für alle $x < K^n$].

Beweis: Die zu ψ gehörigen Matrizen (c_{jk}^i) seien wie am Anfang von § 3 definiert. Wir betrachten für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ diejenigen Simplexe T_j^i, für die $c_{jj}^i \neq 0$, d. h. $T_j^i < \varphi(T_j^i)$ ist; ihre Anzahlen seien s^i. Wir werden dadurch, daß wir ψ durch geeignete andere simpliziale Abbildungen ersetzen, diese Zahlen s^i vermindern.

Sei etwa, für ein gewisses $i < n$, $c_{11}^i \neq 0$; dann folgt zunächst aus $T_1^i < \psi(T_1^i) = U_1^i < K^i$, daß T_1^i zu K^i gehört; ferner folgt aus der Eigenschaft der simplizialen Abbildung ψ, den Ecken eines T^n stets Ecken eines U^n zuzuordnen, daß ein T_1^i enthaltendes T_j^n stets in ein U_1^i enthaltendes U_j^n übergeht, daß also $\psi(\mathfrak{S}(T_1^i)) < \mathfrak{S}(U_1^i)$ ist.

Es werde nun eine kanonische Zerlegung von $\mathfrak{S}(T_1^i)$ vorgenommen und die dadurch gegebene Unterteilung K_2^n von K_1^n betrachtet. Diese legen wir einer simplizialen Abbildung ψ' von K^n auf sich zugrunde: 1. es sei $\psi'(T^0) = \psi(T^0)$ für alle Eckpunkte T^0 von K_1^n; 2. für den im Inneren von T_1^i gewählten Punkt z^* (s. o.) sei $\psi'(z^*)$ ein nicht zu U_1^i gehöriger Eckpunkt ζ eines U_1^i enthaltenden U^n von K_1^n[30]; 3. für jeden der von z^* verschiedenen Eckpunkte z_j^k von K_2^n, die nicht Ecken von K_1^n

[30]) Hier wird die Voraussetzung $i < n$ benutzt.

sind, — die also bei der Konstruktion von D^n im Inneren der T_1^i enthaltenden T_j^k gewählt wurden, — sei $\psi'(z_j^k)$ ein Eckpunkt von U_1^i.

Wir haben uns davon zu überzeugen, daß zu dieser Eckpunktzuordnung ψ' eine simpliziale Abbildung ψ' gehört, daß also, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ Ecken eines Simplexes von K_2^n sind, $\psi'(x_1), \psi'(x_2), \ldots, \psi'(x_{n+1})$ Ecken eines Simplexes von K_1^n sind.

Dies gilt zunächst gewiß für diejenigen Simplexe von K_2^n, die fremd zu $\mathfrak{S}(T_1^i)$, also Simplexe von K_1^n sind; denn in ihren Ecken ist $\psi' = \psi$. Es gilt ferner für jedes Simplex erster Art (s. o.) von D^n; denn $\psi'(z^*)$ ist Eckpunkt eines U_1^i enthaltenden U^n, alle $\psi'(z_j^k)$ sind Ecken von U_1^i, und auch die Bilder aller Ecken von T_1^i sind wegen $\psi'(T_1^i) = U_1^i$ Ecken von U_1^i. Die Behauptung gilt schließlich auch für ein Simplex zweiter Art von D^n, da diejenigen seiner Ecken, die keine z_j^k sind, ein Randsimplex T^k von $\mathfrak{S}(T_1^i)$ bilden, dessen Bildsimplex $\psi(T^k) \subset \overline{\mathfrak{S}(U_1^i)}$ und für dessen Ecken $\psi = \psi'$ ist.

ψ' ist also eine simpliziale Abbildung von K_1^n auf sich, der die Unterteilung K_2^n zugrunde gelegt ist. Sind $t_1^i, t_2^i, \ldots, t_{i+1}^i$ die Simplexe, in die T_1^i durch die Unterteilung K_2^n zerlegt worden ist, so ist, da z^* Eckpunkt von t_j^i ist und $\psi'(z^*)$ nicht auf U_1^i liegt, $\psi'(t_j^i) \neq U_1^i$, also $t_j^i \not\subset \psi'(t_j^i)$; dagegen war $T_1^i \subset \psi(T_1^i) = U_1^i$. Außerhalb $\mathfrak{S}(T_1^i)$ ist beim Übergang von ψ zu ψ' nichts geändert worden; der Durchschnitt $\mathfrak{S}(T_1^i) \cdot K^i$ ist nach Hilfssatz C das Innere IT_1^i von T_1^i; also sind die Abbildungen aller von T_1^i verschiedenen T^i ungeändert geblieben. Somit ist die Zahl s^i derjenigen T^i, die in ihren Bildern enthalten sind, beim Übergang von ψ zu ψ' um 1 vermindert worden. Ferner ist nach Hilfssatz D für $j < i$ $\mathfrak{S}(T_1^i)$ fremd zu K^j, also ist an den Abbildungen der T^j und an den Zahlen $s^j (j < i)$ nichts geändert worden.

Die Unterteilung K_2^n, zu der wir bei der Konstruktion von ψ' geführt wurden, ist als Unterteilung von K_1^n ebenso wie K_1^n eine Unterteilung der baryzentrischen Zerlegung $\bar{K}^n$ von K^n; sie besitzt also alle oben benutzten, in den Hilfssätzen B bis E ausgedrückten Eigenschaften von K_1^n. Dieser Umstand ermöglicht es, weiter von ψ' zu einer Abbildung ψ'' überzugehen und s^i abermals zu vermindern, ohne die s^j für $j < i$ zu verändern.

Somit ergibt sich die Möglichkeit, durch wiederholte Unterteilung von K_1^n und wiederholten Übergang zu anderen simplizialen Abbildungen der Reihe nach $s^0, s^1, \ldots, s^{n-1}$ zum Verschwinden zu bringen. Bei der endgültigen Abbildung φ sind alle Zahlen c_{jj}^i für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ gleich 0, φ ist also nach Satz IVa *regulär*.

Wie stark weicht φ von ψ ab?

Da, in der oben benutzten Terminologie, $\psi(\mathfrak{S}(T_1^i)) \subset \mathfrak{S}(U_1^i)$ und, nach Konstruktion, auch $\psi'(\mathfrak{S}(T_1^i)) \subset \mathfrak{S}(U_1^i)$, und da der Durchmesser von $\mathfrak{S}(U_1^i)$ höchstens $2d$ ist, ist die Entfernung $\varrho(\psi'(x), \psi(x)) \leqq 2d$ für $x \subset \mathfrak{S}(T_1^i)$; außerhalb $\mathfrak{S}(T_1^i)$ ist $\psi' = \psi$. Es werden also beim Übergang von ψ zu ψ' nur die Bilder der Punkte von $\mathfrak{S}(T_1^i)$ verschoben, und zwar höchstens um $2d$. Infolge des Hilfssatzes E wird aber bei sukzessiver Ausführung der einzelnen, die Zahl s^i vermindernden, Übergänge zu anderen simplizialen Abbildungen das Bild jedes Punktes von K^n *höchstens einmal* verschoben. Da also bei der Beseitigung jeder einzelnen der n Zahlen $s^i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ das Bild jedes Punktes x um höchstens $2d$ verschoben wird, ist $\varrho(\varphi(x), \psi(x)) \leqq 2nd$.

Damit ist der Hilfssatz F bewiesen.

d) Satz V: *Jede Abbildung f von C^n auf sich kann durch reguläre simpliziale Abbildungen beliebig gut approximiert werden.*

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$; es ist eine reguläre simpliziale Abbildung von C^n auf sich so anzugeben, daß $\varrho(\varphi(x), f(x)) < \varepsilon$ ist.

$C^n = C_0^n, C_1^n, \ldots, C_i^n, \ldots$ sei eine Folge sukzessiver Unterteilungen von C^n derart, daß 1. $C_{i+1}^n (i = 0, 1, \ldots)$ eine Unterteilung einer baryzentrischen Zerlegung von C_i^n und somit eine Unterteilung einer baryzentrischen Zerlegung jedes $C_j^n (j \leqq i)$ ist, und daß 2. die Maxima $d_0, d_1, \ldots, d_i, \ldots$ der Simplexdurchmesser von $C_0^n, C_1^n, \ldots, C_i^n, \ldots$ gegen 0 konvergieren[31]).

Infolge der Bedingung $\lim d_i = 0$ kann man für hinreichend großes i und hinreichend großes $k \geqq i$ durch eine simpliziale Abbildung ψ von C_i^n auf sich, der die Unterteilung C_k^n zugrunde gelegt ist, f beliebig gut approximieren[26]).

Wir wählen i, k und ψ so, daß 1. $\varrho(f(x), \psi(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$, 2. $2nd \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Aus Hilfssatz F, angewandt auf $C_i^n = K^n$, und $C_k^n = K_1^n$, folgt die Existenz einer regulären simplizialen Abbildung φ von C_i^n auf sich, für die $\varrho(\varphi(x), \psi(x)) \leqq 2nd \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, also $\varrho(\varphi(x), f(x)) < \varepsilon$ ist.

φ ist regulär in bezug auf C_i^n, d. h. es liegt kein Fixpunkt auf einem j-dimensionalen Simplex $(j < n)$ von C_i^n. Da C_i^n eine Unterteilung von C^n ist, ist φ daher erst recht regulär in bezug auf C^n.

Damit ist der Satz V bewiesen.

[31]) Forderung 2) ist, wie eine elementare Überlegung lehrt, von selbst erfüllt, wenn C_{i+1}^n diejenige baryzentrische Unterteilung von C_i^n ist, bei der die in C_i^n zu wählenden Punkte y_j (s. Abschn. a)) die Schwerpunkte im gewöhnlichen Sinne sind.

§ 7.

Der Index eines Fixpunktes [32]).

ξ sei ein Punkt eines n-dimensionalen euklidischen Gebietes R^n, V eine Umgebung von ξ, die zu R^n gehört, f eine in V definierte eindeutige und stetige Abbildung mit $f(V) \subset R^n$, ξ der einzige Fixpunkt von f in V. In jedem Punkt $x \subset V$ bringen wir den Vektor $\mathfrak{v}(x) = \overrightarrow{xf(x)}$ an; ξ ist eine isolierte Nullstelle der $\mathfrak{v}(x)$ und (im allgemeinen) eine isolierte Singularität des Feldes der Richtungen der $\mathfrak{v}(x)$. Den „Index" von ξ bestimmen wir in der üblichen Weise: T^n sei ein ξ im Inneren enthaltendes Simplex, das samt $f(T^n)$ zu R^n gehört, und S^{n-1} seine Randsphäre; U^n sei ebenfalls ein Simplex von R^n, s^{n-1} sein Rand und η ein innerer Punkt von U^n. S^{n-1} und s^{n-1} sind als Ränder der zugleich mit R^n orientierten Simplexe T^n und U^n in bekannter Weise zu orientieren. Jedem Punkt x von S^{n-1} ordnen wir den Punkt x' von s^{n-1} zu, in dem s^{n-1} von dem zu $\mathfrak{v}(x)$ parallelen Strahl durch η geschnitten wird. Der Grad dieser Abbildung $x' = r(x)$ ist, wie man leicht zeigt [32]), unabhängig von der Wahl der T^n, U^n, η; er heißt der „Index" des Fixpunktes ξ [33]).

Im § 5 wurde der Index für Fixpunkte spezieller affiner Abbildungen bereits definiert. Wir haben uns jetzt davon zu überzeugen, daß diese spezielle Definition von der soeben gegebenen allgemeinen umfaßt wird.

Es sei also — im Anschluß an § 5 — φ affin, $T^n \subset U^n = \varphi(T^n)$, ξ der einzige Fixpunkt in T^n und im Innern von T^n gelegen. T^n und U^n verwenden wir zugleich in den Rollen der gleichnamigen Simplexe aus der soeben formulierten Definition des Index. Dann sind $\varphi(S^{n-1})$ und $r(S^{n-1})$ zwei Abbildungen von S^{n-1} auf s^{n-1}; verschiebt man die durch die Vektoren $\mathfrak{v}(x)$ bestimmten Halbstrahlen parallel zu sich, indem man ihre Anfangspunkte x gleichförmig, geradlinig und stetig in den Punkt η überführt, so bewegen sich, da die Strecken $x\eta$ ganz in U^n verlaufen, die Schnittpunkte der Halbstrahlen mit s^{n-1} stetig auf s^{n-1}, und $\varphi(S^{n-1})$ geht stetig in $r(S^{n-1})$ über. Der Grad von $r(S^{n-1})$, d. h. der Index — nach der allgemeinen Definition — von ξ, ist daher gleich dem Grad von $\varphi(S^{n-1})$, also gleich $+1$ oder -1, je nachdem

---

[32]) Man vgl. Feigl, Fixpunktsätze für spezielle n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Math. Annalen 98 (1927), § 2.

[33]) In diese Definition des Index geht die zugrunde gelegte euklidische Geometrie von R^n mit ihren Begriffen von Geradlinigkeit und Parallelität ein. Es läßt sich jedoch zeigen, daß der Wert des Index von der speziellen Geometrie in R^n unabhängig ist. Ein Beweis dieser Invarianz, die übrigens für das Folgende unwesentlich ist, ist im „Anhang II" dargestellt, wo auch Literaturangaben gemacht werden.

T^n von $\varphi(T^n)$ im positiven oder im negativen Sinne bedeckt wird, d. h. gleich dem Index im Sinne des § 5.

f, T^n, S^{n-1}, U^n, s^{n-1}, ξ, η haben dieselbe Bedeutung wie früher, j sei der Index von ξ. Ferner sei $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ eine in T^n gleichmäßig gegen f konvergierende Folge von Abbildungen, von denen jede höchstens endlich viele Fixpunkte in T^n hat; v_k sei die Indexsumme der Fixpunkte von f_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

Hilfssatz. Für hinreichend großes k ist $v_k = j$.

Beweis. Da f auf S^{n-1} keinen Fixpunkt besitzt, gibt es eine Zahl $m > 0$ so, daß $\varrho(f(x), x) > m$ für $x \subset S^{n-1}$ und eine Zahl K so, daß $\varrho(f(x), f_k(x)) < m$ für $k > K$, $x \subset T^n$, ist. Es ist also gewiß $f_k(x) \neq x$ für $x \subset S^{n-1}$. Da ferner auf S^{n-1} für diese k

$$\varrho(f(x), f_k(x)) < \varrho(f(x), x) < \varrho(f(x), x) + \varrho(x, f_k(x))$$

ist, haben die Vektoren $\mathfrak{v}_k(x) = \overrightarrow{x f_k(x)}$ und $\mathfrak{v}(x) = \overrightarrow{x f(x)}$ in keinem Punkt x_0 von S^{n-1} zueinander diametrale Richtungen, da in diesem Falle

$$\varrho(f(x_0), f_k(x_0)) = \varrho(f(x_0), x_0) + \varrho(x_0, f_k(x_0))$$

wäre. Mithin haben nach einem bekannten Satz von Poincaré und Bohr[34]) die Grade der beiden durch parallele Verpflanzung der Vektoren $\mathfrak{v}(x)$ und und $\mathfrak{v}_k(x)$ in den Punkt η definierten Abbildungen $r(S^{n-1})$ und $r_k(S^{n-1})$ von S^{n-1} auf s^{n-1} den gleichen Wert; nach Definition ist dieser j für $r(S^{n-1})$. Andererseits ist der Grad von $r_k(S^{n-1})$ infolge der Additivität der Indizes[35]) gleich v_k. Folglich ist $v_k = j$.

Wir betrachten nun wieder reguläre Abbildungen des Komplexes C^n auf sich. Für jeden Fixpunkt einer solchen Abbildung ist der Index erklärt.

Satz VI. *$f, f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ seien reguläre Abbildungen von C^n auf sich, $v, v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ die Indexsummen ihrer Fixpunkte. Die Folge $f_1, f_2, \ldots$ konvergiere gleichmäßig gegen f; dann ist für hinreichend großes k $v_k = v$.*

Beweis. Man schließe die Fixpunkte von f in Simplexe T_q^n ein und wähle k zunächst so groß, daß $\varrho(f_k(x), f(x))$ in C^n kleiner ist als das Minimum von $\varrho(x, f(x))$ außerhalb der T_q^n, daß also außerhalb der T_q^n auch kein Fixpunkt eines f_k liegt. Dann folgt Satz VI unmittelbar durch Anwendung des soeben bewiesenen Hilfssatzes auf die einzelnen T_q^n.

---

[34]) Siehe z. B. Feigl, l. c., Fußnote [18]).

[35]) Feigl, l. c., § 2 (14).

§ 8.

Der allgemeine Fixpunktsatz.

$f, f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ seien beliebige Abbildungen von C^n auf sich, und die Folge der f_k konvergiere gleichmäßig gegen f. Wir betrachten die im § 2 definierten Konstanten $S^i f$ und $S_k^i f$.

Ist γ^i ein Zyklus, so sind für hinreichend großes k die (singulären) Bildzyklen $f(\gamma^i)$ und $f_k(\gamma^i)$ so eng benachbart, daß sie zueinander homolog sind[36]). Für ein hinreichend großes k ist daher

$$S^i f = S^i f_k. \tag{1}$$

Satz VIIa. *Die Indexsumme* $v = \sum_q j_q$ *der Fixpunkte* ξ_q $(q = 1, 2, \ldots, m)$ *der regulären Abbildung* f *von* C^n *auf sich ist*

$$v = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i S^i f.$$

Beweis. Nach Satz V kann man f durch reguläre simpliziale Abbildungen $f_1, f_2, \ldots$ beliebig gut approximieren. Ist v_k die Indexsumme der Fixpunkte von f_k, so ist nach Satz IVc

$$v_k = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i S^i f_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Für hinreichend großes k ist nach Satz VI

$$v_k = v \tag{3}$$

und nach (1)

$$S^i f = S^i f_k.$$

Aus (1), (2) und (3) folgt die Behauptung.

Satz VIIb. *Jede Abbildung* f *von* C^n *auf sich kann durch reguläre Abbildungen beliebig gut approximiert werden. Ist* $f_1, f_2, \ldots$ *irgendeine Folge regulärer, gleichmäßig gegen* f *konvergierender Abbildungen und* v_k *die Indexsumme der Fixpunkte von* f_k, *so ist für hinreichend großes* k

$$v_k = (-1)^n \sum_i (-1)^i S^i f.$$

Beweis. Die Möglichkeit der Approximation ist der Inhalt von Satz V. Nach Satz VIIa ist

$$v_k = (-1) \sum_i (-1)^i S^i f_k,$$

[36]) Siehe § 1, e und Fußnote [17]).

und für hinreichend großes k ist nach (1)

$$(-1)^n \sum_i (-1)^i S^i f = (-1)^n \sum_i (-1)^i S^i f_k ,$$

also gilt Satz VII b.

Anhang I.

Elementarer Beweis der Existenz eines Fixpunktes bei einer affinen Abbildung eines Simplexes auf sich[37]).

$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ seien die Ecken eines n-dimensionalen Simplexes T des n-dimensionalen euklidischen Raumes, x_i^ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ die Koordinaten von x_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Zu jedem Punkt x des Raumes gehören eindeutig „Schwerpunktkoordinaten" in bezug auf T, d. h. Zahlen μ^i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, die die Gleichungen

$$\sum_i \mu^i = 1 , \tag{1}$$

$$\mu^i x_i^\nu = x^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\ ^{38}) \tag{2}$$

erfüllen, wobei x^ν die kartesischen Koordinaten von x sind; umgekehrt bestimmt jedes System von Zahlen μ^i, das (1) erfüllt, vermöge (2) einen Punkt x. Die Punkte $x \subset T$ sind durch

$$\mu^i \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n+1) \tag{3}$$

charakterisiert; Gültigkeit des Gleichheitszeichens in einer dieser Relationen bedeutet, daß x Randpunkt von T ist.

Die Schwerpunktkoordinaten sind bekanntlich invariant gegenüber affinen Abbildungen, d. h. wenn bei einer solchen x_i in $\bar{x}_i$, x in $\bar{x}$ übergehen, so ist

$$\mu^i \bar{x}_i^\nu = \bar{x}^\nu . \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

$\bar{x}_i$ habe die Schwerpunktkoordinaten m_i^j:

$$\bar{x}_i^\nu = m_i^j x_j^\nu . \tag{5}$$

Die Bedingung dafür, daß x *Fixpunkt*, daß also $\bar{x}^\nu = x^\nu$ sei, ist dann auf Grund von (4), (5), (2)

$$\mu^i m_i^j x_j^\nu = \mu^j x_j^\nu$$

oder

$$\mu^i (\delta_i^j - m_i^j) x_j^\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

[37]) Siehe Fußnote [28]).

[38]) Es ist im folgenden stets über den doppelt vorkommenden Index, also in (2) über i, zu summieren.

wobei $\delta_i^j = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem $i = j$ oder $i \neq j$ ist. Außerdem ist wegen

$$\sum_j m_i^j = \sum_j \delta_i^j = 1 \tag{1a}$$

auch

$$\sum_j \mu^i (\delta_i^j - m_i^j) \cdot 1 = 0, \tag{6'}$$

und die Determinante des aus (6) und (6') bestehenden Systems von Gleichungen für die Unbekannten $\mu^i(\delta_i^j - m_i^j)$ verschwindet nicht, da die x_j die Ecken von T sind. Daher ist (6) gleichbedeutend mit

$$\mu^i (\delta_i^j - m_i^j) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n+1). \tag{7}$$

Die Schwerpunktkoordinaten der Fixpunkte sind also die Lösungen μ^i der Gleichungen (1) und (7).

Nun bilde die betrachtete Abbildung das Simplex T auf sich ab; dann ist nach (3)

$$m_i^j \geqq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{8}$$

Wir behaupten, daß es wenigstens einen Fixpunkt in T gibt, d. h. daß die Gleichungen (1), (7) eine Lösung besitzen, die (3) erfüllt.

Dem Beweise schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Eine m-reihige quadratische Matrix (u_i^j) heiße eine „U^m-Matrix", wenn

$$\sum_{j=1}^{m} u_i^j \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{9}$$

$$u_i^j \leqq 0 \quad \text{für} \quad j \neq i \tag{10}$$

ist. Dabei sei i der Spalten-, j der Zeilenindex, d. h. die Glieder der j-ten Zeile seien $u_1^j, u_2^j, \ldots, u_m^j$, usw. U^m-Matrizen haben folgende Eigenschaften:

a) Jeder r-reihige Hauptminor H^r einer U^m-Matrix ist eine U^r-Matrix.

Beweis. H^r ist dadurch gegeben, daß i und j nur die Indizes $h_1, h_2, \ldots, h_r$ durchlaufen. Die Gültigkeit von (10) ist selbstverständlich. Ferner ist

$$\sum_{\varrho=1}^{r} u_i^{h_\varrho} = \sum_{j=1}^{m} u_i^j - \sum_{j \neq h_\varrho} u_i^j \qquad (i = h_1, \ldots, h_r).$$

Hier ist die erste Summe auf der rechten Seite $\geqq 0$ nach (9); für jedes Glied u_i^j der zweiten Summe ist $i \neq j$, also $u_i^j \leqq 0$ nach (10); mithin ist $\sum_{\varrho=1}^{r} u_i^{h_\varrho} \geqq 0$, für H^r gilt auch (9), H^r ist also eine U^r-Matrix.

b) Die Determinante einer U^m-Matrix ist $\geqq 0$.

Beweis. Da das einzige Element einer U^1-Matrix nach (9) nicht negativ ist, ist die Behauptung für $m=1$ richtig. Sie sei für $m-1$ bewiesen.

Sie ist gewiß richtig für solche U^m-Matrizen, für die in sämtlichen m Relationen (9) das Gleichheitszeichen gilt; denn dann ist die Determinante 0. Die Behanptung sei nun außer für alle U^{m-1}-Matrizen auch für alle diejenigen U^m-Matrizen bewiesen, für die in $k-1$ der Relationen (9) das Zeichen $>$ gilt; wir haben sie für eine U^m-Matrix zu beweisen, für die in (9) genau k-mal das Zeichen $>$ steht.

Sei in einer solchen Matrix M etwa $\sum_{j=1}^{m} u_1^j = s > 0$. Bezeichnet D die Determinante von M, $\overline{D}$ die Determinante der Matrix $\overline{M}$, die aus M dadurch entsteht, daß man das Glied u_1^1 durch $-\sum_{j=2}^{m} u_1^j$ ersetzt, D_1 die Determinante des zu u_1^1 komplementären Hauptminors M_1, so ist, da

$$u_1^1 = s + \left(-\sum_{j=2}^{m} u_1^j\right)$$

ist,

$$D = s D_1 + \overline{D}. \tag{11}$$

Nun ist M_1 nach a) eine U^{m-1}-Matrix, es ist also $D_1 \geqq 0$ zufolge unserer Annahme; in $\overline{M}$ ist die Summe der Glieder der ersten Spalte 0, das erste Element dieser Spalte ist $-\sum_{j=2}^{m} u_1^j \geqq 0$ nach (10), die übrigen Spalten sind identisch mit den entsprechenden in M; $\overline{M}$ ist daher eine U^m-Matrix, für die in $k-1$ Relationen (9) das Zeichen $>$ steht, so daß wir $\overline{D} \geqq 0$ als bewiesen annehmen. Da außerdem $s > 0$ ist, folgt aus (11) $D \geqq 0$.

c) Ist H^r ein r-reihiger Hauptminor einer U^m-Matrix, und ist seine Determinante $D^r = 0$, so verschwinden die Determinanten aller r-reihigen quadratischen Matrizen, die denselben Spalten angehören wie H^r.

Beweis. Die Behauptung ist für $r=1$ richtig; denn H^1 besteht aus einem Element u_i^i, und es ist $u_i^i = D^1 = 0$, also nach (9) $\sum_{j(\neq i)} u_i^j \geqq 0$ und mithin nach (10) $u_i^j = 0$ für $j = 1, \ldots, m$. Die Behauptung sei für $r-1$ bewiesen. H^r sei etwa durch $i, j \leqq r$ gegeben.

Sind nun für $i \leqq r$, $j > r$ sämtliche $u_i^j = 0$, so ist der Satz gewiß richtig; es sei daher etwa $u_1^{j_0} \neq 0$ für ein $j_0 > r$. Da dann $u_1^{j_0} < 0$ ist, so folgt aus (9) und (10)

$$s^r = \sum_{j=1}^{r} u_1^j \geqq - \sum_{j=r+1}^{m} u_1^j \geqq - u_1^{j_0} > 0 .$$

Sind nun d, d_1, $\bar{d}$ ebenso für H^r definiert wie in b) D, D_1, $\bar{D}$ für M, so ist

$$d = s^r d_1 + \bar{d} = 0 ,$$

also, da $s^r > 0$ und nach b) $d_1 \geqq 0$, $\bar{d} \geqq 0$ ist, $d_1 = 0$. d_1 ist die Determinante des zu u_1^1 komplementären Hauptminors H^{r-1} von H^r; nach Annahme verschwinden daher alle $(r-1)$-reihigen Determinanten, die aus der zweiten bis r-ten Spalte gebildet sind. Mithin verschwinden auch alle r-reihigen Determinanten der r ersten Spalten.

d) Wir betrachten die durch $i \leqq r-1$, $j \leqq r$ bestimmte Untermatrix M^r einer U^m-Matrix M. M_k sei diejenige quadratische r-reihige Matrix, die aus M^r durch Tilgung der $(r+1-k)$-ten Spalte entsteht $(k = 0, 1, \ldots, r)$, D_k die Determinante von M_k. Dann ist $(-1)^k D_k \geqq 0$.

Beweis. M_0 ist ein Hauptminor, also folgt $D_0 \geqq 0$ aus a) und b). Es sei $k \geqq 1$. Man setze die $(r+1-k)$-te Zeile an die letzte Stelle; die neue Matrix heiße M_k'. In M_k' addiere man alle Zeilen zur letzten; die neue Matrix heiße M_k''. In M_k'' multipliziere man die letzte Zeile mit -1; die neue Matrix heiße M_k'''. Da M_k' aus M_k durch $k-1$ Vertauschungen von Zeilen entsteht, hat M_k''' die Determinante $(-1)^k D_k$, und nach b) ist unsere Behauptung bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß M_k''' eine U^r-Matrix ist.

Das letzte Glied derjenigen Spalte von M_k''', die in M_k den Index i hat, ist $-\sum_{j=1}^{r} u_i^j$, die übrigen Glieder sind u_i^j $(j \neq r+1-k,\ j \leqq r)$, die Summe aller Glieder ist daher $-u_i^{r+1-k}$; da nach Definition von M_k $i \neq r+1-k$ ist, ist nach (10) $-u_i^{r+1-k} \geqq 0$, M_k''' hat also die Eigenschaft (9).

Die ersten $r-1$ Zeilen von M_k''' bilden diejenige Matrix M^*, die aus M^r durch Streichung der $(r+1-k)$-ten Zeile und der $(r+1-k)$-ten Spalte entsteht. Ein Element, das in M^r gleichen Zeilen- und Spaltenindex hat, hat diese Eigenschaft daher auch in M^*; mithin hat ein Element, dessen Zeilen- und Spaltenindizes in M^* voneinander verschieden sind, auch in M^r voneinander verschiedene Indizes und ist daher nach (10) nicht positiv. In den ersten $r-1$ Zeilen von M_k''' ist (10) also erfüllt. Die Glieder der letzten Zeile sind $v_i = -\sum_{j=1}^{r} u_i^j = -\sum_{j=1}^{m} u_i^j + \sum_{j=r+1}^{m} u_i^j$; für die ersten $r-1$ dieser Glieder ist $i \leqq r$, also nach (10) $u_i^j \leqq 0$ für

$j \quad r+1, \ldots, m$, mithin $\sum_{j=r+1}^{m} u_i^j \leqq 0$; da nach (9) auch $-\sum_{j=1}^{m} u_i^j \leqq 0$ ist, folgt $v_i \leqq 0$. Folglich hat M_k''' die Eigenschaft (10) und ist daher eine U^r-Matrix.

e) Der Rang der U^m-Matrix M sei $r < m$. Dann besitzt das Gleichungssystem

$$\mu^i u_i^j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{7*}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu^i = 1 \tag{1*}$$

ein Lösungssystem $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^m$ mit

$$\mu^i \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{3*}$$

Beweis. Nach c) gibt es einen Hauptminor H^r mit von 0 verschiedener Determinante; durch gleichzeitige Umnumerierung der Zeilen und Spalten läßt sich erreichen, daß H^r durch $i, j \leqq r$ definiert ist. Die Determinante des Gleichungssystems für die Unbekannten λ^i $(i = 1, \ldots, r+1)$

$$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda^i = 1 \tag{1**}$$

$$\lambda^i u_i^j = 0 \quad (i = 1, \ldots, r+1;\ j = 1, \ldots, r) \tag{7**}$$

ist, in der Bezeichnungsweise von d)

$$\Delta = (-1)^r \sum_{k=0}^{r} (-1)^k D_k;$$

da $D_0 > 0$ als Determinante von H^r und $(-1)^k D_k \geqq 0$ nach d) ist, ist $(-1)^r \Delta > 0$. Die Lösung des Systems (1**), (7**) ist nach elementaren Regeln

$$\lambda^i = \frac{(-1)^{i-1} D_{r-i+1}}{\Delta} = \frac{(-1)^{r-i+1} D_{r-i+1}}{(-1)^r \Delta}.$$

Der Nenner des zweiten Bruches ist, wie wir eben sahen, positiv, der Zähler ist $\geqq 0$ nach d); also ist

$$\lambda^i \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, r+1). \tag{3**}$$

Setzen wir nun

$$\mu^i = \lambda^i \qquad (i = 1, \ldots, r+1), \tag{12a}$$

$$\mu^i = 0 \qquad (i = r+2, \ldots, m), \tag{12b}$$

so sind (1*) und (3*) erfüllt; ferner ist

$$\mu^i u_i^j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, r),$$

und die analogen Gleichungen gelten infolge der linearen Abhängigkeit der letzten $m-r$ Zeilen der Matrix (u^j) von den ersten r Zeilen auch für $j=r+1, \ldots, m$. Mithin erfüllen die μ^i auch (7*), womit die Behauptung bewiesen ist.

Zusatz. Besitzt das System (1*), (7*), (3*) mehr als eine Lösung, so ist $r \leqq m-2$, und (12b) zeigt, daß es dann eine Lösung mit $\mu^m = 0$ gibt.

Wir kehren zu der Frage der Existenz des Fixpunktes, d. h. der Lösbarkeit des Systems (1), (7), (3) zurück. Die Matrix $(u_i^j) = (\delta_i^j - m_i^j)$ ist infolge (8) und der aus (1a) folgenden Relationen

$$(13) \qquad \sum_j u_i^j = \sum_j (\delta_i^j - m_i^j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

eine U^{n+1}-Matrix; ihr Rang ist infolge (13) $< n+1$. Nach e) ist daher das System (1), (7), (3) lösbar.

Mithin existiert stets ein Fixpunkt in T. Aus dem Zusatz zu e) folgt überdies, daß es *genau* einen Fixpunkt in T gibt, falls auf dem Rand von T kein Fixpunkt liegt[39]).

Anhang II.

Beweis der topologischen Invarianz des Indexes eines Fixpunktes[40]).

a) Wir knüpfen an den ersten Absatz des § 7 an. Ist $x \subset T^n$, so bezeichne $\varphi(x)$ den Endpunkt des in η angebrachten Vektors $\mathfrak{v}(x) = \overrightarrow{x f(x)}$. Nach Definition ist der Index von ξ die „Ordnung" von η in bezug auf das Bild $\varphi(S^{n-1})$;[41]) diese ist — infolge einfacher Eigenschaften des Abbildungsgrades[41]) — gleich dem Grade $\gamma_\eta(\varphi(T^n))$ der Abbildung $\varphi(T^n)$ im Punkte η. Ist E^n ein in T^n enthaltenes, ξ im Innern enthaltendes Element, d. h. topologisches Bild eines n-dimensionalen Simplexes, so ist

$$\gamma_\eta(\varphi(T^n)) = \gamma_\eta(\varphi(E^n));$$

[39]) Damit sind die Hilfssätze A und B (§ 5) elementar bewiesen.

[40]) Siehe Fußnote [33]). — Andere Beweise dieser Invarianz sind in den folgenden Arbeiten enthalten: H. Hopf, Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen, Math. Annalen **95** (1925), § 1. Lefschetz, Intersections ... (s. Fußnote [5])); Fixpunkte werden dort als Schnittpunkte gedeutet, und die Invarianz des Fixpunktindexes ist daher in der in Teil I, § 6, bewiesenen Invarianz des „Kroneckerschen" (Schnitt-) Indexes enthalten. Ferner für $n=2$ J. Nielsen, l. c. (s. Fußnote [4])), § 36.

[41]) Die hier benutzten, im wesentlichen in Arbeiten von Brouwer enthaltenen Eigenschaften des Abbildungsgrades und der Ordnung sind im § 1 der Arbeit des Verfassers: Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, I. Teil (Math. Annalen **100** (1928), S. 579—608), zusammenfassend dargestellt.

denn nur ξ wird durch φ auf η abgebildet, η wird von $\varphi(T^n - E^n)$ also nicht bedeckt. Der Index von ξ ist mithin gleich $\gamma_\eta(\varphi(E^n))$ für ein beliebiges, ξ enthaltendes Element E^n.

b) Wir betrachten zunächst eine spezielle Klasse von Fixpunkten: ξ heiße „normal", wenn es ein ξ enthaltendes Element E^n gibt, das zu dem Bild $f(R^{n-1})$ seines Randes R^{n-1} fremd ist. Wir wählen $\eta \neq \xi$ und behaupten, daß

$$\gamma_\xi(\varphi(E^n)) = \gamma_\xi(f(E^n))$$

ist. In der Tat: E^n läßt sich durch eine eineindeutige Abbildung H so auf eine Vollkugel V^n vom Radius 1 beziehen, daß $H(\xi) = \omega$ der Mittelpunkt von V^n ist. Ist $x \subset R^{n-1}$, so sei x_t der Punkt in E^n, für den $H(x_t)$ im Abstand t von ω auf dem Radius $\omega H(x)$ liegt; es ist also $x_0 = \xi$, $x_1 = x$. Ist nun für $x \subset R^{n-1}$, $0 \leqq t \leqq 1$, $\mathfrak{v}_t(x)$ der Vektor $\overrightarrow{x_t f(x)}$, so ist $\mathfrak{v}_t(x) \neq 0$, da $x_t \subset E^n$, aber nach Voraussetzung $f(x) \not\subset E^n$ ist. Bezeichnet $f_t(x)$ den Endpunkt des in ξ angebrachten Vektors $\mathfrak{v}_t(x)$, so ist daher $\xi \neq f_t(x)$. Wir haben also für $0 \leqq t \leqq 1$ eine stetige Schar von Abbildungen $f_t(R^{n-1})$ mit $\xi \not\subset f_t(R^{n-1})$; dabei ist $f_0(R^{n-1}) = f(R^{n-1})$, $f_1(R^{n-1}) = \varphi(R^{n-1})$. Da sich mithin die durch f und φ vermittelten Abbildungen des Randes R^{n-1} von E^n stetig ohne Überschreitung von ξ ineinander überführen lassen, haben $f(E^n)$ und $\varphi(E^n)$ in ξ den gleichen Grad [41]), w. z. b. w.

Somit ist $\gamma_\xi(f(E^n))$ der Index von ξ; aus der topologischen Invarianz, d. h. Unabhängigkeit vom Koordinatensystem, des Abbildungsgrades [41]) folgt daher die topologische Invarianz des Indexes eines normalen Fixpunktes.

c) ξ sei nun nicht mehr normal, aber normalisierbar; d. h. es existiere eine stetige Schar von Abbildungen $f^t(T^n)$, $0 \leqq t \leqq 1$, so daß f^1 normal und $f^0 = f$ sei und daß für jedes t ξ der einzige Fixpunkt von f^t sei. Das unter Zugrundelegung irgendeines Koordinatensystems konstruierte Vektorfeld $\mathfrak{v}(x)$ erleidet beim Übergang von f zu f^1 durch die Schar f^t hindurch eine stetige Abänderung, bei der ξ immer die einzige Nullstelle bleibt; der Index von ξ ändert sich daher nicht, und er ist somit für f, gemessen in einem beliebigen Koordinatensystem, derselbe wie für die Abbildung f^1, bei der ξ normal ist; für diese aber ist nach b) der Index in allen Koordinatensystemen der gleiche. Mithin ist der Index jedes normalisierbaren Fixpunktes topologisch invariant.

d) Zum Invarianzbeweis für einen beliebigen Fixpunkt genügt es nunmehr zu zeigen, daß sich jeder Fixpunkt normalisieren läßt. Dies geschieht z. B. folgendermaßen:

Für jeden Punkt $x \subset T^n$ sei r_x das Verhältnis der Strecke ξx zu dem zwischen ξ und dem Rande S^{n-1} von T^n gelegenen Stück des Strahls ξx; es ist also $r_\xi = 0$, $r_x > 0$ für $x \neq \xi$, $r_x = 1$ für $x \subset S^{n-1}$. d sei der Durchmesser von T. Ist dann x^t der Punkt, der auf dem Strahl $\overrightarrow{x f(x)}$ jenseits $f(x)$ in der Entfernung $t r_x d$ von $f(x)$ liegt, so wird $f = f^0$ durch $f^t(x) = x^t$, $0 \leqq t \leqq 1$, normalisiert. Denn ξ bleibt immer der einzige Fixpunkt, und es ist $f^1(S^{n-1})$ fremd zu T^n, da der Vektor $\overrightarrow{x f^1(x)}$ für $x \subset S^{n-1}$ länger als d ist.

Princeton N. J., 4. April 1928.

(Eingegangen am 18. April 1928.)

Zur Transzendenz von e.

Von

J. Popken in Groningen.

Bezeichnet θ irgendeine algebraische Zahl, so ist bekanntlich

$$|e-\theta|>0.$$

Hieraus folgt: genügt θ der irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$\sum_{h=0}^{n} c_h x^h = 0,$$

wo $(c_0, c_1, \ldots, c_n)=1$ ist [1]), so ist es möglich, eine nur von n und

$$H=|c_0|+|c_1|+\ldots+|c_n|$$

abhängige positive Zahl η_1 zu finden mit der Eigenschaft

$$|e-\theta|>\eta_1.$$

H nennen wir die Höhe von θ (es ist klar, daß H eine durch θ eindeutig bestimmte ganze Zahl $\geqq 1$ ist). Ist $P(x)=\sum_{h=0}^{n} c_h x^h$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht alle verschwinden, so ist auch

$$|P(e)|>0.$$

Nennen wir $H=|c_0|+|c_1|+\ldots+|c_n|$ die Höhe des Polynoms $P(x)$, dann können wir also eine nur von n und der Höhe H abhängige Zahl η_2 finden mit der Eigenschaft

$$|P(e)|>\eta_2.$$

Jetzt liegt die Frage nahe, welche Funktionen η_1 und η_2 von n und H die genannten Eigenschaften besitzen.

[1]) Mit $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ wird der größte gemeinsame Teiler von $c_0, c_1, \ldots, c_n$ gemeint.

Um diese Frage zu beantworten, habe ich, unterstützt durch Herrn Prof. Dr. J. G. van der Corput, die folgenden Sätze abgeleitet.

Satz I. *Ist $P(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grade n und von der Höhe $H \geqq 3$, so gibt es eine nur von n abhängige Zahl λ_1 derart, daß*

$$|P(e)| > H^{-n-\frac{\lambda_1}{\lg\lg H}}$$

ist.

Aus diesem Satz folgt:

1. Zu jedem positiven ε und jedem positiven ganzen n gibt es eine nur von n und ε abhängige positive Zahl C_1 derart, daß für jedes Polynom $P(x)$ vom Grade n mit ganzen rationalen Koeffizienten die Ungleichung

$$|P(e)| > C_1 H^{-n-\varepsilon}$$

gilt, wo H die Höhe des Polynoms $P(x)$ bezeichnet.

Denn wählt man $H_1 \geqq 3$ so groß, daß $\frac{\lambda_1}{\lg\lg H_1} < \varepsilon$ ist, so gilt, wenn $H \geqq H_1$ ist, die Beziehung

$$|P(e)| > H^{-n-\varepsilon}.$$

Bei gegebenen n und ε gibt es nur eine endliche Anzahl von Polynomen vom Grade n und von einer Höhe $< H_1$, so daß diese Polynome bei hinreichend kleinem positivem $C_1 \leqq 1$ die verlangte Eigenschaft besitzen, und wegen $C_1 \leqq 1$ haben auch die übrigen Polynome vom Grade n diese Eigenschaft.

2. Ist $\delta > 0$, und bezeichnet $P(x)$ ein Polynom vom Grade n mit ganzen rationalen Koeffizienten mit der Eigenschaft

$$|P(e)| < \delta,$$

so gibt es zu jedem positiven ε eine nur von n und ε abhängige positive Zahl C_2 derart, daß die Höhe H des Polynoms $P(x)$ größer als

$$C_2 \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{n+\varepsilon}}$$

ist. (Man braucht nur

$$C_2 = C_1^{\frac{1}{n+\varepsilon}}$$

zu setzen.)

Auch Herr E. Borel[2]) hat dieses Problem betrachtet. Er findet das folgende weniger scharfe Resultat:

---

[2]) E. Borel, „Sur la nature arithmétique du nombre e“. Comptes Rendus **128** (1899, I), p. 596–599.

Ist $0 < \delta < \frac{1}{e}$, und bezeichnet $P(x)$ ein Polynom vom Grade n mit ganzen rationalen Koeffizienten mit der Eigenschaft

$$|P(e)| < \delta,$$

so gibt es zwei nur von n abhängige positive Zahlen C_3 und C_4 derart, daß die Höhe H des Polynoms $P(x)$ größer als

$$C_3 \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\lg\lg\frac{1}{\delta}^{C_4}}$$

ist.

Die von mir gefundene Ungleichung ist schärfer; denn je größer der Exponent von $\frac{1}{\delta}$ ist, um so schärfer ist das Ergebnis, und aus meinem Resultat ergibt sich, daß im Borelschen Satze der Nenner $\lg\lg\frac{1}{\delta}$ im Exponent fortgelassen werden darf und daß für C_4 jede feste Zahl $< \frac{1}{n}$ gewählt werden darf.

Daß übrigens Satz I sehr scharf ist, sieht man unmittelbar, wenn man das erste Korollar von Satz I vergleicht mit

Satz II. *Zu jedem positiven ganzen n gibt es eine nur von n abhängige positive Zahl C_5 derart, daß zu jedem positiven ganzen H ein Polynom $P(x)$ vom Grade n und von einer Höhe $\leqq H$ mit ganzen rationalen Koeffizienten gefunden werden kann mit der Eigenschaft*

$$|P(e)| < C_5 H^{-n}.$$

Außerdem beweise ich noch

Satz III. *Ist θ eine algebraische Zahl vom Grade n und von der Höhe $H \geqq 3$, so gibt es eine nur von n abhängige Zahl λ_2 derart, daß*

$$|e - \theta| > H^{-n-1-\frac{\lambda_2}{\lg\lg H}}$$

ist.

Folglich:

1. Zu jedem positiven ε und jedem positiven ganzen n gibt es eine nur von n und ε abhängige positive Zahl C_6 derart, daß für jede algebraische Zahl θ vom Grade n und von der Höhe H die Ungleichung

$$|e - \theta| > C_6 H^{-n-1-\varepsilon}$$

gilt.

2. Ist $\delta > 0$, und bezeichnet θ eine algebraische Zahl vom Grade n und von der Höhe H mit der Eigenschaft

$$|e - \theta| < \delta,$$

so gibt es zu jedem positiven ε eine nur von n und ε abhängige positive Zahl C_7 derart, daß die Höhe von θ größer als

$$C_7 \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{n+1+\varepsilon}}$$

ist.

Obgleich die hier benutzte Beweisanordnung eine gewisse Ähnlichkeit zeigt mit dem bekannten Beweis der Transzendenz von e, ist der Unterschied doch so groß, daß ich die Hilfssätze vom Anfang an formulieren und beweisen muß. (Man vergleiche die nachträgliche Bemerkung am Schluß.)

Hilfssatz 1. *Für*

$$B = \varrho e^{i\varphi},\ \varrho > 1, \quad -\pi < \varphi \leqq +\pi, \quad \lg B = \lg \varrho + i\varphi, \quad f(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$$

und

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' \frac{f^{(k)}(x)}{\lg^k B}, \quad F(0) B^x - F(x) \quad Q(x)$$

ist

$$|Q(x)| \leqq (\varrho e^{|\varphi|})^{|x|} \sum_{m=0}^{n} |a_m|\,|x|^m \leqq (\varrho e^{\pi})^{|x|} \sum_{m=0}^{n} |a_m|\,|x|^m.$$

Vorbemerkung. Setzt man $B = e$, so findet man den aus der Theorie der Transzendenz von e bekannten Hilfssatz zurück[3]).

Beweis.
$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=k}^{n} \frac{a_m\, m!\, x^{m-k}}{(m-k)!\, \lg^k B}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \frac{a_m\, m!\, x^{m-k}}{(m-k)!\, \lg^k B} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k'=0}^{m} \frac{a_m\, m!\, x^{k'}}{k'!\, \lg^{m-k'} B}.$$

Folglich

$$F(0) = \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m\, m!}{\lg^m B}, \tag{1}$$

$$F(0) B^x = \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m\, m!}{\lg^m B} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{x^{k'} \lg^{k'} B}{k'!} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{a_m\, m!\, x^{k'} \lg^{k'-m} B}{k'!},$$

$$Q(x) = F(0) B^x - F(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k'=m+1}^{\infty} \frac{a_m\, m!\, x^{k'} \lg^{k'-m} B}{k'!},$$

$$|Q(x)| \leqq \sum_{m=0}^{n} |a_m|\,|x|^m \sum_{k'=m+1}^{\infty} \frac{|x|^{k'-m}\,|\lg B|^{k'-m}}{(k'-m)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} |a_m|\,|x|^m \sum_{k''=1}^{\infty} \frac{|x|^{k''}\,|\lg B|^{k''}}{k''!}.$$

[3]) Vgl. z. B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie III, S. 91 (Satz 741).

Es ist $\varrho > 1$, also

$$|\lg B| = |\lg \varrho + i\varphi| \leqq \lg \varrho + |\varphi| = \lg(\varrho e^{|\varphi|}),$$

daher

$$|Q(x)| \leqq \sum_{m=0}^{n} |a_m| |x|^m \sum_{k''=1}^{\infty} \frac{x^{k''} \{\lg(\varrho e^{|\varphi|})\}^{k''}}{k''!}$$

$$< (\varrho e^{|\varphi|})^{|x|} \sum_{m=0}^{n} |a_m| |x|^m \leqq (\varrho e^{\pi})^{|x|} \sum_{m=0}^{n} |a_m| |x|^m.$$

Hilfssatz 2. *Bezeichnet* $P(x) = \sum_{h=0}^{n} c_h x^h$ *ein Polynom vom Grade* n $(n \geqq 1)$ *und von der Höhe* H *mit ganzen rationalen Koeffizienten, so gibt es eine nur von* n *abhängige Zahl* b_1 *derart, daß für jede Primzahl* p *mit der Eigenschaft*

$$\frac{(p-1)!}{b_1^p} > H$$

die Ungleichung

$$|P(e)| \{(n+1)p\}! > H$$

gilt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $(c_0, c_1, \ldots, c_n) = 1$ voraussetzen. Denn ist $(c_0, c_1, \ldots, c_n) = d$, $d > 1$, so setzen wir

$$\bar{P}(x) = \sum_{h=0}^{n} \bar{c}_h x^h = \sum_{h=0}^{n} \frac{c_h}{d} x^h,$$

also

$$\bar{P}(e) = \frac{P(e)}{d}, \qquad \bar{H} = \sum_{h=0}^{n} |\bar{c}_h| = \frac{H}{d},$$

$(\bar{c}_0, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) = 1$.

Wenn daher

$$\frac{(p-1)!}{b_1^p} > H$$

ist, so ist auch

$$\frac{(p-1)!}{b_1^p} > \bar{H}.$$

Ist der Hilfssatz für den Fall $(\bar{c}_0, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) = 1$ schon bewiesen, so erhalten wir

$$|\bar{P}(e)| \{(n+1)p\}! > \bar{H},$$

folglich

$$|P(e)| \{(n+1)p\}! > H,$$

so daß Hilfssatz 2 dann auch im allgemeinen Fall gilt.

Wir können daher $(c_0, c_1, \ldots, c_n) = 1$ voraussetzen.

Ich setze im Hilfssatz 1 $B = e$ und weiter

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!\,(x-r)} \prod_{g=0}^{n} (x-g)^p, \tag{2}$$

wo p eine Primzahl ist, und r irgendeine ganze Zahl $0 \leqq r \leqq n$ bezeichnet. (Es wird also n in Hilfssatz 1 durch $np+p-1$ ersetzt.)

$F(x)$ und $Q(x)$ seien wie in Hilfssatz 1 definiert.

Ist h eine ganze Zahl $\geqq 0$ und $\leqq n$, so ist

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(p-1)!\,\{(x-h)+(h-r)\}} \prod_{g=0}^{n} \{(x-h)+(h-g)\}^p \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{m=p-1}^{np+p-1} A_{h,m}(x-h)^m; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$A_{h,m}$ ist ganz rational;

$$A_{h,\,p-1} = 0, \quad \text{wenn} \quad h \neq r; \tag{4}$$

$$A_{r,\,p-1} = \{r!\,(-1)^{n-r}(n-r)!\}^p. \tag{5}$$

Aus (3) folgt weiter

$$\sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}|\,|x-h|^m \leqq \frac{1}{|x-h|+|h-r|} \prod_{g=0}^{n} \{|x-h|+|h-g|\}^p.$$

und hieraus ergibt sich, wenn $x = h+n$ gesetzt wird,

$$\sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}| \leqq \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}|\,n^m \leqq \{(n+n)^p\}^{n+1} = b_0^p, \tag{6}$$

wo $b_0 = (2n)^{n+1}$ ist.

Nach der Definition von $Q(x)$ ist

$$F(0)\,P(e) = \sum_{h=0}^{n} c_h F(0)\,e^h = \sum_{h=0}^{n} c_h F(h) + \sum_{h=0}^{n} c_h Q(h). \tag{7}$$

Aus der Definition von $F(x)$ und aus (3) folgt

$$\sum_{h=0}^{n} c_h F(h) = \sum_{h=0}^{n} c_h \Big\{ A_{h,\,p-1} + pA_{h,p} + (p+1)\,pA_{h,\,p+1} + \dots + \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} A_{h,\,np+p-1} \Big\},$$

mit Rücksicht auf (4) also

$$\sum_{h=0}^{n} c_h F(h) = c_r A_{r,\,p-1} + p \sum_{h=0}^{n} c_h \Big\{ A_{h,p} + (p+1)\,A_{h,\,p+1} + \dots + \frac{(np+p-1)!}{p!} A_{h,\,np+p-1} \Big\}.$$

Nach (5) ist daher

$$(8) \qquad \sum_{h=0}^{n} c_h F(h) = c_r \{r!(-1)^{n-r}(n-r)!\}^p + p \cdot \Sigma\},$$

wo Σ ganz rational ist.

Unter den Koeffizienten von $P(x)$ ist mindestens einer nicht durch p teilbar wegen $(c_0, c_1, \ldots, c_n) = 1$. Wir wählen r nun derart, daß $p \nmid c_r$ ist.[4]) Ist $p > n$, so ist $p \nmid \{r!(-1)^{n-r}(n-r)!\}^p$, folglich wegen (8)

$$p \nmid \sum_{h=0}^{n} c_h F(h), \quad \text{also} \quad \sum_{h=0}^{n} c_h F(h) \neq 0,$$

daher

$$(9) \qquad \left| \sum_{h=0}^{n} c_h F(h) \right| \geqq 1, \quad \text{wenn } p > n \text{ ist.}$$

Es ist

$$\left| \sum_{h=0}^{n} c_h Q(h) \right| \leqq \sum_{h=0}^{n} |c_h| \, |Q(h)|.$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$|Q(h)| \leqq e^h \sum_{m=p-1}^{np+p-1} \left| \frac{A_{0,m}}{(p-1)!} \right| h^m \leqq \frac{e^n}{(p-1)!} \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{0,m}| \, n^m,$$

somit wegen (6) mit $h = 0$

$$|Q(h)| \leqq \frac{e^n}{(p-1)!} b_0^p,$$

folglich

$$(10) \qquad \left| \sum_{h=0}^{n} c_h Q(h) \right| \leqq \frac{H e^n b_0^p}{(p-1)!}.$$

Wir wählen nun die nur von n abhängige Zahl $b_1 \geqq 2 e b_0$ derart, daß für jede positive ganze Zahl g, welche der Ungleichung

$$\frac{(g-1)!}{b_1^g} > 1$$

genügt, $g > n$ ist.

Genügt die Primzahl p der Ungleichung

$$(11) \qquad \frac{(p-1)!}{b_1^p} > H,$$

so ist wegen $H \geqq 1$ jedenfalls $p > n$, also nach (9)

$$\left| \sum_{h=0}^{n} c_h F(h) \right| \geqq 1.$$

[4]) Mit $a \nmid b$ wird gemeint: a teilt b nicht.

Außerdem ist nach (10)

$$\left|\sum_{h=0}^{n} c_h Q(h)\right| \leqq \frac{H e^n b_0^p}{(p-1)!} < \frac{H e^p b_0^p}{(p-1)!} \leqq \frac{H b_1^p}{2^p (p-1)!} .$$

Ziehen wir (11) in Betracht, so finden wir

$$\left|\sum_{h=0}^{n} c_h Q(h)\right| < \frac{1}{2} .$$

Wegen (7) ist daher

$$(12) \qquad |F(0)\cdot P(e)| \geqq \left|\sum_{h=0}^{n} c_h F(h)\right| - \left|\sum_{h=0}^{n} c_h Q(h)\right| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

Nach (3) mit $h = 0$ ist aber

$$F(0) = \frac{1}{(p-1)!}\{(np+p-1)!\, A_{0,np+p-1} + (np+p-2)!\, A_{0,np+p-2} + \ldots + (p-1)!\, A_{0,p-1}\},$$

folglich

$$|F(0)| \leqq \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!}\{|A_{0,np+p-1}| + |A_{0,np+p-2}| + \ldots + |A_{0,p-1}|\}.$$

Nach (6) ist also

$$|F(0)| \leqq \frac{(np+p-1)!\, b_0^p}{(p-1)!} < (np+p-1)!\, \frac{b_1^p}{(p-1)!} .$$

Wegen der Ungleichung (11) ist daher

$$|F(0)| < \frac{(np+p-1)!}{H} ,$$

so daß aus (12) folgt

$$\frac{(np+p-1)!}{H}\,|P(e)| > \frac{1}{2} ,$$

also

$$\{(n+1)p\}!\,|P(e)| > H.$$

Hilfssatz 3. *Bezeichnet θ eine algebraische Zahl vom Grade n und von der Höhe H, so gibt es eine nur von n abhängige positive Zahl b_2 derart, daß für jede Primzahl p mit der Eigenschaft*

$$\frac{(p-1)!}{b_2^p} > H$$

gilt

$$|e-\theta|\,\{(n+1)p\}! > 1.$$

Beweis. θ genügt der irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$P(x) = \sum_{h=0}^{n} c_h x^h = 0 ,$$

wo $(c_0, c_1, \ldots, c_n) = 1$ und $H = \sum_{h=0}^{n} |c_h|$ ist. Man kann

$$|e - \theta| < 1$$

voraussetzen, da sonst die Behauptung unmittelbar klar ist. Dann ist $|\theta| > 1$, so daß man im Hilfssatz 1 $B = \theta$ setzen darf.

Weiter sei, wie im Hilfssatz 2,

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{(p-1)!}(x-r)^{} \prod_{q=0}^{n} (x \quad g)^{p},$$

wo p wieder eine Primzahl ist, und r derart gewählt wird, daß $p \nmid c_r$ ist; dieses ist wegen $(c_0, c_1, \ldots, c_n) = 1$ möglich. Wie im Hilfssatz 2 ist für jedes ganze h im Intervall $0 \leqq h \leqq n$

$$(3) \qquad f(x) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{m=p-1}^{np+p-1} A_{h,m}(x-h)^m,$$

$$(6) \qquad \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}| \leqq \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}| n^m \leqq b_0^p,$$

wo $b_0 = (2n)^{n+1}$ ist. Ebenso wie dort gilt auch hier, wenn $p > n$ ist, die Ungleichung

$$(13) \qquad \Big| \sum_{h=0}^{n} c_h \Big\{ A_{h,p-1} + p A_{h,p} + (p+1) p A_{h,p+1} + \ldots + \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} A_{h,np+p-1} \Big\} \Big| \geqq 1.$$

$F(x)$ und $Q(x)$ seien wie in Hilfssatz 1 definiert.

Nach der Voraussetzung ist

$$\sum_{h=0}^{n} c_h \theta^h = 0,$$

daher

$$0 = \sum_{h=0}^{n} c_h F(0) \theta^h = \sum_{h=0}^{n} c_h F(h) + \sum_{h=0}^{n} c_h Q(h),$$

folglich

$$\Big| \sum_{h=0}^{n} c_h F(h) \Big| = \Big| \sum_{h=0}^{n} c_h Q(h) \Big|.$$

Ich setze

$$\sum_{h=0}^{n} c_h F(h) = U_\theta,$$

also

$$|U_\theta| = \Big| \sum_{h=0}^{n} c_h Q(h) \Big| \leqq \sum_{h=0}^{n} |c_h| \, |Q(h)|.$$

Nach Hilfssatz 1 (mit $np+p-1$ statt n) ist

$$|Q(h)| < \{|\theta| e^{\pi}\}^h \sum_{m=p-1}^{np+p-1} \frac{A_{0,m}}{(p-1)!} h^m \leqq \frac{(e+1)^n e^{\pi n}}{(p-1)!} \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{0,m}| n^m;$$

wegen (6) folgt hieraus

$$|Q(h)| < \frac{(e+1)^n e^{\pi n} b_0^p}{(p-1)!},$$

also

$$|U_\theta| < \frac{H(e+1)^n e^{\pi n} b_0^p}{(p-1)!}.$$

Jetzt wählen wir die nur von n abhängige Zahl $b_2 > 2(e+1)e^{\pi} b_0$ und $> \frac{2b_0}{\{\lg(e-1)\}^{n+1}}$ so groß, daß für jede positive ganze Zahl g, welche der Ungleichung

$$\frac{(g-1)!}{b_2^g} > 1$$

genügt, $g > n$ ist.

Genügt die Primzahl p der Ungleichung

$$\frac{(p-1)!}{b_2^p} > H, \tag{14}$$

so ist wegen $H \geqq 1$ jedenfalls $p > n$ und deshalb

$$|U_\theta| < \frac{H(e+1)^n e^{\pi n} b_0^p}{(p-1)!} < \frac{H b_2^p}{2^p (p-1)!}.$$

Nach (14) also

$$|U_\theta| < \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Aus der Definition von $F(x)$ und aus (3) folgt

$$U_\theta = \sum_{h=0}^{n} c_h \left\{ \frac{A_{h,p-1}}{\lg^{p-1}\theta} + \frac{p A_{h,p}}{\lg^p \theta} + \ldots + \frac{(np+p-1)! A_{h,np+p-1}}{(p-1)! \lg^{np+p-1}\theta} \right\}. \tag{16}$$

Es werde gesetzt

$$U = \sum_{h=0}^{n} c_h \left\{ A_{h,p-1} + p A_{h,p} + \ldots + \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} A_{h,np+p-1} \right\}. \tag{17}$$

Wegen $p > n$ ist nach (13)

$$|U| \geqq 1.$$

Nach (15) folglich

$$|U - U_\theta| \geqq |U| - |U_\theta| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Aus (16) und (17) folgt aber

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} |U-U_\theta| = \Big|\sum_{h=0}^{n} c_h \Big\{ & A_{h,p-1}\Big(1 - \frac{1}{\lg^{p-1}\theta}\Big) + p A_{h,p}\Big(1 - \frac{1}{\lg^{p}\theta}\Big) + \dots \\ & + \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} A_{h,np+p-1}\Big(1 - \frac{1}{\lg^{np+p-1}\theta}\Big)\Big\}\Big| . \end{aligned} \right.$$

Nach unserer Annahme liegt θ im Kreise

$$|z-e|<1;$$

hieraus folgt

$$|\lg\theta - 1| = \left|\int_e^\theta \frac{dz}{z}\right| < \left|\int_e^\theta dz\right| = |\theta - e|,$$

also für jedes ganze $k \geqq p-1$ und $\leqq np+p-1$

$$\left|1 - \frac{1}{\lg^k\theta}\right| = k\left|\int_1^{\lg\theta} \frac{dw}{w^{k+1}}\right| \leqq k\left|\int_1^{\lg\theta} \frac{dw}{\{\lg(e-1)\}^{k+1}}\right|$$

$$= \frac{k}{\{\lg(e-1)\}^{k+1}}|\lg\theta - 1| < \frac{k|\theta-e|}{\{\lg(e-1)\}^{k+1}} < \frac{np+p}{\{\lg(e-1)\}^{(n+1)p}}|\theta-e|,$$

so daß aus (19) folgt

$$|U-U_\theta| \leqq \frac{(np+p)|\theta-e|}{\{\lg(e-1)\}^{(n+1)p}} \cdot \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!}$$

$$\times \sum_{h=0}^{n} |c_h|\{|A_{h,p-1}| + |A_{h,p}| + \dots + |A_{h,np+p-1}|\}.$$

Wegen (6) ist daher

$$|U-U_\theta| \leqq \frac{\{(n+1)p\}!\,|e-\theta|\,Hb_0^p}{(p-1)!\,\{\lg(e-1)\}^{(n+1)p}}.$$

Nach (14) ist

$$H < \frac{(p-1)!}{b_2^p} < \frac{(p-1)!}{2^p b_0^p}\{\lg(e-1)\}^{(n+1)p}.$$

Folglich

$$|U-U_\theta| < \frac{1}{2}\{(n+1)p\}!\,|e-\theta|.$$

Mit Rücksicht auf (18) bekommt man hieraus

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\{(n+1)p\}!\,|e-\theta\ ,$$

womit Hilfssatz 3 bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Es gibt eine absolute Konstante g_0 derart, daß für jedes $g \geqq g_0$ das Intervall*

$$(20)\qquad g - \frac{g}{\lg g} < x \leqq g$$

wenigstens eine Primzahl enthält.

Beweis. Dieser Hilfssatz ist natürlich bekannt und kann übrigens leicht verschärft werden.

Der Beweis geht z. B. so:

Die Anzahl der Primzahlen $\leqq g$ ist

$$\int_2^g \frac{du}{\lg u} + o\left(\frac{g}{\lg^2 g}\right).$$ [5])

Die Anzahl der Primzahlen $\leqq g - \frac{g}{\lg g}$ ist somit

$$\int_2^{g-\frac{g}{\lg g}} \frac{du}{\lg u} + o\left(\frac{g}{\lg^2 g}\right).$$

Die Anzahl der Primzahlen im Intervall (20) ist also

$$\int_{g-\frac{g}{\lg g}}^{g} \frac{du}{\lg u} + o\left(\frac{g}{\lg^2 g}\right).$$

Diese Anzahl ist, wenn g_0 hinreichend groß ist, für jedes $g \geqq g_0$ positiv, weil

$$\int_{g-\frac{g}{\lg g}}^{g} \frac{du}{\lg u} \geqq \frac{g}{\lg g} \cdot \frac{1}{\lg g} = \frac{g}{\lg^2 g}$$

ist. Im Intervall (20) liegt also wenigstens eine Primzahl.

Hilfssatz 5. *Bezeichnet $P(x)$ das Polynom vom Hilfssatz 2 vom Grade n und von der Höhe H, b_1 die dort genannte nur von n abhängige Zahl, und ist g_0 die im Hilfssatz 4 erwähnte absolute Konstante, so gilt für jede ganze Zahl $g \geqq g_0$ mit der Eigenschaft*

$$\frac{(g-1)!}{(b_1 e)^g} > H$$

die Ungleichung

$$|P(e)|\{(n+1)g\}! > H.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 4 liegt im Intervall (20) wenigstens eine Primzahl p. Diese Primzahl p genügt folgenden Ungleichungen:

$$p(p+1)\ldots(g-1) \leqq g^{g-p} < g^{\frac{g}{\lg g}} = e^g$$

[5]) Vgl. z. B. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, S. 196.

$(p(p+1)\dots(g-1)$ bezeichnet, falls $p = g$ ist, die Zahl 1), und

$$\frac{(p-1)!}{b_1^p} = \frac{(g-1)!}{b_1^g} \cdot \frac{1}{p(p+1)\dots(g-1)} > \frac{(g-1)!}{b_1^g} \cdot \frac{1}{e^g} > H.$$

p erfüllt die Voraussetzung von Hilfssatz 2, daher

$$|P(e)|\{(n+1)g\}! \geqq |P(e)|\{(n+1)p\}! > H.$$

Beweis der Sätze. $P(x) = \sum_{h=0}^{n} c_h x^h$ sei das betreffende Polynom vom Satz 1. — Wir wählen eine nur von n abhängige Zahl H_0 so groß, daß für jede ganze Zahl g mit der Eigenschaft

$$\frac{(g-1)!}{b_1^g} > H_0$$

auch gilt $g \geqq 2$ und $g \geqq g_0$, wo b_1 und g_0 die im Hilfssatz 5 genannten Zahlen sind.

Es sei H die Höhe von $P(x)$, und es werde zunächst der Fall $H \geqq H_0$ betrachtet. Nach Hilfssatz 5 erfüllt jedes positive ganze g, das der Ungleichung

$$\frac{(g-1)!}{(b_1 e)^g} > H$$

genügt, auch die Beziehung

$$|P(e)|\{(n+1)g\}! > H.$$

g_1 sei die kleinste positive ganze Zahl, welche der Beziehung

$$\frac{(g_1-1)!}{(b_1 e)^{g_1}} > H$$

genügt.

Aus $H \geqq H_0$ folgt $g_1 \geqq 2$, also

$$\frac{(g_1-1)!}{(b_1 e)^{g_1}} > H \geqq H_0 \tag{21}$$

und

$$\frac{(g_1-2)!}{(b_1 e)^{g_1-1}} \leqq H. \tag{22}$$

Außerdem ist nach Hilfssatz 5

$$|P(e)|\{(n+1)g_1\}! > H,$$

also, wenn wir $n+1 = \bar{n}$ setzen,

$$|P(e)|(\bar{n}g_1)! > H. \tag{23}$$

Nach der Stirlingschen Formel ist für jedes positive ganze g

$$g! = g^g e^{-g} \sqrt{2\pi g} \cdot K(g),$$

wo $K(g) \to 1$ wenn $g \to \infty$.

Wegen (23) ist somit

$$|P(e)|(\bar{n}g_1)^{\bar{n}g_1}e^{-\bar{n}g_1}\sqrt{2\pi\bar{n}g_1}\,K(\bar{n}g_1) > H. \tag{24}$$

Andererseits ist wegen (22)

$$\frac{g_1^{g_1}e^{-g_1}\sqrt{2\pi g_1}\,K(g_1)}{g_1(g_1-1)\,(b_1e)^{g_1-1}} \leqq H. \tag{25}$$

Also ist nach (24) und (25)

$$\begin{aligned}|P(e)|\,H^n(2b_1e\bar{n})^{\bar{n}g_1} &> \frac{1}{(\bar{n}g_1)^{\bar{n}g_1}e^{-\bar{n}g_1}\sqrt{2\pi\bar{n}g_1}\,K(\bar{n}g_1)}\cdot\frac{g_1^{ng_1}e^{-ng_1}(2\pi g_1)^{\frac{1}{2}n}(K(g_1))^n(b_1e)^n}{g_1^n(g_1-1)^n}\cdot(2\bar{n})^{ng_1}\\ &= \frac{(2\pi g_1)^{\frac{1}{2}\bar{n}}(K(g_1))^{\bar{n}}(b_1e)^{\bar{n}}}{\sqrt{2\pi\bar{n}g_1}\cdot K(\bar{n}g_1)\,g_1^{\bar{n}}(g_1-1)^{\bar{n}}}\cdot 2^{\bar{n}g_1}.\end{aligned} \tag{26}$$

Die letzte Seite ist größer als $C_8^{g_1}$, wo C_8 eine geeignet gewählte, nur von n abhängige positive Zahl bezeichnet, da bei festem n und unbeschränkt wachsendem g der Ausdruck

$$\left\{\frac{(2\pi g)^{\frac{1}{2}\bar{n}}(K(g))^{\bar{n}}(b_1e)^{\bar{n}}}{\sqrt{2\pi\bar{n}g}\cdot K(\bar{n}g)\,g^{\bar{n}}(g-1)^{\bar{n}}}\cdot 2^{\bar{n}g}\right\}^{\frac{1}{g}}$$

nach 2^n strebt. Setzen wir

$$C_9 = \frac{1}{C_8}(2b_1e\bar{n})^{\bar{n}}$$

(so daß C_9 nur von n abhängt), dann finden wir wegen (26)

$$|P(e)|\,H^n C_9^{g_1} > 1. \tag{27}$$

Wegen (25) gibt es eine nur von n abhängige Zahl b_3 derart, daß für jedes $g_1 \geqq b_3$

$$g_1^{g_1} < H^2$$

ist, und die Bedingung $g_1 \geqq b_3$ ist wegen (21) bei hinreichend großem H_0 erfüllt.

Hieraus folgt

$$g_1 < \frac{3\lg H}{\lg\lg H},$$

für jedes $H \geqq H_0$ bei hinreichend großem H_0, denn wäre

$$g_1 \geqq \frac{3\lg H}{\lg\lg H},$$

so wäre

$$\lg g_1 \geqq \lg\lg H + \lg 3 - \lg\lg\lg H > \frac{2}{3}\lg\lg H$$

für jedes $H \geqq H_0$ bei hinreichend großem H_0, daher

$$g_1 \lg g_1 > \frac{3 \lg H}{\lg \lg H} \cdot \frac{2}{3} \lg \lg H = 2 \lg H,$$

also

$$g_1^{g_1} > H^2,$$

was nicht der Fall ist.

Daher ist

$$g_1 < \frac{3 \lg H}{\lg \lg H},$$

somit

$$C_9^{g_1} < C_9^{\frac{3 \lg H}{\lg \lg H}} = H^{\frac{3 \lg C_9}{\lg \lg H}} = H^{\frac{\lambda_0}{\lg \lg H}},$$

wenn $\lambda_0 = 3 \lg C_9$ gesetzt wird, also nur abhängig von n ist.

Wegen (27) ist daher

$$|P(e)| H^{n + \frac{\lambda_0}{\lg \lg H}} > 1,$$

folglich

$$|P(e)| > H^{-n - \frac{\lambda_0}{\lg \lg H}},$$

wenn $H \geqq H_0$ ist.

Es gibt nur eine endliche Anzahl von Polynomen $P(x)$ vom Grade n und von einer Höhe $H < H_0$ und $\geqq 3$. Man kann deshalb die nur von n abhängige positive Zahl $\lambda_1 \geqq \lambda_0$ so bestimmen, daß jedes dieser Polynome $P(x)$ der Ungleichung

$$|P(e)| > H^{-n - \frac{\lambda_1}{\lg \lg H}}$$

genügt.

Wegen $\lambda_1 \geqq \lambda_0$ gilt daher, wenn $H \geqq 3$ ist, allgemein

$$|P(e)| > H^{-n - \frac{\lambda_1}{\lg \lg H}},$$

womit Satz I bewiesen ist.

Wir können aber statt Hilfssatz 2 ebenso Hilfssatz 3 benutzen und finden dann, wenn wir nur $|P(e)|$ durch $|e - \theta| H$ und b_1 durch b_2 ersetzen, auf genau demselben Wege

$$H |e - \theta| > H^{-n - \frac{\lambda_2}{\lg \lg H}},$$

also

$$|e - \theta| > H^{-n-1 - \frac{\lambda_2}{\lg \lg H}}.$$

Satz III ist hiermit bewiesen.

Satz II beweist man z. B. so:

Die Anzahl der Polynome $Q(x)$[6]) mit ganzen rationalen Koeffizienten

[6]) Die Koeffizienten von $Q(x)$ können auch sämtlich gleich Null sein.

$\geqq 0$ von einem Grade $\leqq n$ und von einer Höhe $\leqq H'$ ist, wie eine einfache Berechnung zeigt, gleich dem Binomialkoeffizient

$$C_{n+H'+1}^{n+1} \geqq \frac{(H')^{n+1}}{(n+1)!} + 1.$$

Betrachten wir zunächst die Polynome $Q(x)$ von einer Höhe $\leqq H' = \left[\frac{H}{2}\right]$[7]), wo $H > 6$ ist. Die Anzahl der genannten Polynome $Q(x)$ ist dann

$$> \frac{\left(\frac{H}{2}-1\right)^{n+1}}{(n+1)!} + 1 > \frac{H^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} + 1.$$

Ist $Q_1(x)$ ein Polynom dieser Menge, so ist

$$0 \leqq Q_1(e) \leqq e^n H' \leqq \frac{e^n H}{2}.$$

Sind $Q_2(x)$ und $Q_3(x)$ verschiedene Polynome der betrachteten Menge, so ist wegen der Transzendenz von e

$$Q_2(e) \neq Q_3(e).$$

Im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{e^n H}{2}$ gibt es also mehr als $\frac{H^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} + 1$ verschiedene Zahlen $Q(e)$.

Immer kann man deshalb (Schubfachmethode!) zwei Polynome $Q_4(x)$ und $Q_5(x)$ finden mit der Eigenschaft

$$(28) \qquad |Q_4(e) - Q_5(e)| < \frac{\frac{e^n H}{2}}{\frac{H^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}} = C_{10} H^{-n},$$

wo $C_{10} = \frac{e^n 3^{n+1}(n+1)!}{2}$ gesetzt ist.

Wir setzen

$$P_0(x) = Q_4(x) - Q_5(x).$$

$P_0(x)$ ist daher ein Polynom von einem Grade $\leqq n$ und einer Höhe $H'' \leqq 2H' \leqq H$. Wegen (28) ist

$$(29) \qquad |P_0(e)| < C_{10} H^{-n}.$$

Wäre der Grad von $P_0(x)$ kleiner als n, dann wäre wegen Satz I (Korollar 1 mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$)

$$|P_0(e)| > C_{11}(H'')^{-(n-1)-\frac{1}{2}} \geqq C_{11} H^{-n+\frac{1}{2}},$$

wo C_{11} nur von n abhängig ist, also nach (29)

$$C_{10} H^{-n} > C_{11} H^{-n+\frac{1}{2}},$$

---

[7]) Mit $[a]$ wird gemeint: die größte ganze Zahl $\leqq a$.

folglich

$$H < \left(\frac{C_{10}}{C_{11}}\right)^2 = C_{12},$$

wo C_{12} nur von n abhängt.

Beim Beweis von Satz II unterscheide ich jetzt zwei verschiedene Fälle.

1. Es sei

$$H > \mathrm{Max}(6, C_{12})^{8}).$$

Dann hat nach dem Obigen das Polynom $P(x) = P_0(x)$ die verlangten Eigenschaften, und zwar für jedes $C_5 \geqq C_{10}$.

2. Es sei

$$H \leqq \mathrm{Max}(6, C_{12}). \tag{30}$$

Zu jedem positiven ganzen n und jedem positiven ganzen H, das (30) erfüllt, wähle ich irgendein Polynom $P_1(x)$ vom Grade n und von einer Höhe $\leqq H$. Die Anzahl dieser Polynome $P_1(x)$ ist kleiner als eine nur von n abhängige Zahl, so daß es eine nur von n abhängige Zahl C_{13} gibt mit der Eigenschaft, daß für jedes dieser Polynome

$$|P_1(e)| < C_{13} H^{-n}$$

ist. In diesem Falle hat also dieses Polynom $P_1(x)$ die verlangten Eigenschaften, und zwar für jedes $C_5 \geqq C_{13}$.

Satz II gilt dann mit

$$C_5 = \mathrm{Max}(C_{10}, C_{13}).\ ^{9})$$

[8]) $\mathrm{Max}(a, b)$ bedeutet die größte der Zahlen a und b, oder (falls sie gleich sind) den gemeinsamen Wert.

[9]) Zusatz bei der Korrektur. Von Hilfssatz 1 braucht man nur den Spezialfall $B = e$, und Hilfssatz 3 ist ganz überflüssig, da der Fall $B = e$ von Hilfssatz 1 Satz I gibt und III unmittelbar aus I folgt. Denn ist $P(x)$ ein Polynom von der Höhe H, das für $x = \theta$ verschwindet, so ist, falls $|e-\theta| \leqq 1$

$$|P(e)| = |P(e) - P(\theta)| = \left|\sum_{h=0}^{n} c_h (e^h - \theta^h)\right| \leqq |e-\theta|\, n (e+1)^{n-1} H,$$

also nach I

$$|e-\theta| > \frac{1}{n(e+1)^{n-1}} \cdot H^{-n-1-\frac{\lambda_1}{\lg\lg H}},$$

womit Satz III, der im Fall $|e-\theta| > 1$ trivial ist, bewiesen ist.

(Eingegangen am 14. April 1928.)

Zur Transzendenz von π.

Von

J. Popken in Groningen.

Das Verfahren, womit ich Satz I meiner Arbeit[1]) zur Transzendenz von e abgeleitet habe, ist auch auf π (anstatt auf e) anwendbar und gibt dann das folgende Resultat:

Bezeichnet θ eine algebraische Zahl[2]) *vom Grade n und von der Höhe H, so gibt es eine nur von n abhängige Zahl ν derart, daß*

$$|\theta - \pi| > 2^{-H^{\nu}}. \tag{1}$$

Ich schicke dem Beweis dieses Satzes drei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Genügt α einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grade m und von der Höhe $\overline{H}$, und wird $r_1 = 2^m$ gesetzt, so gibt es eine nur von m abhängige Zahl C_1 derart, daß für jede Primzahl p mit der Eigenschaft*

$$p > C_1 \overline{H}^{2r_1}$$

die Ungleichung

$$(r_1\, p)!\ |\alpha - \pi i| > 1$$

gilt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$|\alpha - \pi i| < \log 2 \tag{2}$$

voraussetzen, da sonst die Behauptung evident ist.

Nach der Stirlingschen Formel ist

$$g! = g^g\, e^{-g} \sqrt{2\pi g}\ \ K(g)$$

[1]) Zur Transzendenz von e, Math. Zeitschrift **29**, S. 525–541.

[2]) Erfüllt θ die irreduzible Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$c_0 + c_1 y + \ldots + c_n y^n = 0,$$

ist $c_n \neq 0$, und ist der G. G. T. der Koeffizienten gleich 1, so nenne ich n den Grad, $|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n|$ die Höhe von θ.

mit

$$\lim_{g\to\infty} K(g) = 1,$$

so daß es eine nur von m abhängige Zahl $g_0 > 0$ gibt derart, daß jede positive ganze Zahl $g \geqq g_0$ die Eigenschaft

$$\frac{2^m g}{e^{g-\sqrt{g}}\sqrt{2\pi g}\, K(g)} < \frac{1}{2} \tag{3}$$

besitzt.

α erfüllt eine Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$P(y) = b_0 + b_1 y + \ldots + b_m y^m = 0, \tag{4}$$

wo

$$b_m \neq 0, \quad |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_m| = \overline{H} \tag{5}$$

ist.

Es mögen $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Wurzeln von (4) bezeichnen. Man setze $C_1 = e^2 (2m)^{r_1} + g_0$, also

$$p > C_1 \overline{H}^{2r_1} = \{e^2 (2m)^{r_1} + g_0\} \overline{H}^{2r_1}. \tag{6}$$

Es werde ebenso wie beim Beweis der Transzendenz von π

$$R = \prod_{h=1}^{m} (1 + e^{\alpha_h}) = C + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_r}, \tag{7}$$

wo $\beta_\varrho \neq 0$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ ist und C die Anzahl der Nullen unter den 2^m Exponentensummen bedeutet,

$$f(x) = \frac{(b_m x)^{p-1} \prod_{h=1}^{r} (b_m x - b_m \beta_h)^p}{(p-1)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{8}$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) \tag{9}$$

und

$$Q(x) = e^x F(0) - F(x) \tag{10}$$

gesetzt.

Wegen (2) ist $\alpha \neq 0$, also nach (7)

$$0 < C < 2^m, \quad 0 < r < 2^m = r_1. \tag{11}$$

Aus (8) folgt

$$n = rp + p - 1,$$

und die Formeln (7) und (10) geben

$$F(0) R = C F(0) + \sum_{h=1}^{r} F(\beta_h) + \sum_{h=1}^{r} Q(\beta_h). \tag{12}$$

Ich setze jetzt

$$|\beta_s| = \mathrm{Max}(|\beta_1|, |\beta_2|, \ldots, |\beta_r|),$$
$$|\alpha_t| = \mathrm{Max}(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_m|).$$

Wegen (7) ist

$$|\beta_s| \leqq m\,|\alpha_t|.$$

Es ist

$$|\alpha_t| \leqq |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_m|,$$

denn sonst wäre $|\alpha_t| > 1$, folglich

$$|b_0 + b_1\alpha_t + \ldots + b_{m-1}\alpha_t^{m-1}| \leqq \{|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_{m-1}|\}\,|\alpha_t^{m-1}|$$
$$< |\alpha_t|^m \leqq |b_m\alpha_t^m|,$$

was unmöglich ist, da α_t eine Wurzel von (4) bedeutet.

Folglich ist

$$|\alpha_h| \leqq |\alpha_t| \leqq \overline{H} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m), \tag{13}$$

daher

$$|\beta_h| \leqq |\beta_s| \leqq m\,\overline{H} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r). \tag{14}$$

Nach (6) ist

$$p > e^2\,(2m)^{r_1}\,\overline{H}^{2r_1},$$

somit wegen (11)

$$p > 2^{r_1} > 2^m > C,$$

und wegen (5)

$$p > \overline{H} \geqq |b_m|,$$

und schließlich wegen (5) und (14)

$$p > (\overline{H}\cdot m\,\overline{H})^r \geqq \prod_{h=1}^{r} |b_m\beta_h|,$$

also

$$p > \mathrm{Max}\Big(C, |b_m|, \prod_{h=1}^{r} |b_m\beta_h|\Big).$$

Nach dem Beweis der Transzendenz von π folgt dann bekanntlich[3])

$$\Big|C\,F(0) + \sum_{h=1}^{r} F(\beta_h)\Big| \geqq 1. \tag{15}$$

Nach (8) ist

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|x|^k \leqq \frac{|b_m x|^{p-1} \prod_{h=1}^{r} \{|b_m x| + |b_m\beta_h|\}^p}{(p-1)!};$$

[3]) Vgl. z. B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie III, S. 94, letzte Zeile. Gezeigt wird ebendort, daß die linke Seite von (15) eine ganze rationale nicht durch p teilbare Zahl ist.

wegen (14) und $|b_m| \leqq \overline{H}$ folgt für jedes x mit $|x| \leqq m\overline{H}$

$$(16) \qquad \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|x|^k \leqq \frac{(\overline{H}\cdot m\overline{H})^{p-1}(\overline{H}\cdot m\overline{H}+\overline{H}\cdot m\overline{H})^{pr}}{(p-1)!}$$

$$= \frac{2^{pr}(m\overline{H}^2)^{pr+p-1}}{(p-1)!} \leqq \frac{(2m\overline{H}^2)^{pr_1}}{(p-1)!},$$

wegen $r_1 \geqq r+1$.

Aus (8), (9) und (10) folgt[4])

$$|Q(x)| \leqq e^{|x|}\sum_{k=0}^{n}|a_k|\,|x|^k,$$

folglich

$$\Big|\sum_{h=1}^{r} Q(\beta_h)\Big| \leqq \sum_{h=1}^{r}|Q(\beta_h)| \leqq \sum_{h=1}^{r}\Big(e^{|\beta_h|}\sum_{k=0}^{n}|a_k|\,|\beta_h|^k\Big),$$

also wegen (16) und (14)

$$(17) \qquad \Big|\sum_{h=1}^{r} Q(\beta_h)\Big| \leqq \frac{re^{m\overline{H}}(2m\overline{H}^2)^{pr_1}}{(p-1)!}.$$

Da wegen (6)

$$p > e^2(2m\overline{H}^2)^{r_1} \quad (\text{also } m\overline{H} < \sqrt{p})$$

gilt, ist

$$(18) \qquad \frac{2^m e^{m\overline{H}}(2m\overline{H}^2)^{pr_1}}{(p-1)!} < \frac{2^m e^{\sqrt{p}}(e^{-2}p)^p\cdot p}{p!} = \frac{2^m p}{e^{p-\sqrt{p}}\sqrt{2\pi p}\,K(p)} < \frac{1}{2},$$

da nach (6) $p > g_0$ ausfällt, also (3) mit p statt g gilt.

Mit Rücksicht auf (17) findet man wegen $r < 2^m$

$$(19) \qquad \Big|\sum_{h=1}^{r} Q(\beta_h)\Big| < \frac{1}{2}.$$

Wegen (12), (15) und (19) hat man

$$(20) \qquad |F(0)R| > \frac{1}{2}.$$

Nach (8) und (9) ist

$$F(0) = \sum_{k=0}^{n} k!\,a_k,$$

also

$$|F(0)| \leqq \sum_{k=0}^{n} k!\,|a_k| \leqq (rp+p-1)!\sum_{k=0}^{n}|a_k|,$$

[4]) Vgl. z. B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie III, S. 91 (Satz 741). Man kann den Beweis dieser Ungleichung auch im Hilfssatz 1 meiner in Fußnote 1 genannten Arbeit finden.

folglich wegen (16) mit $|x| = 1$

$$|F(0)| \leqq \frac{(rp+p-1)!\,(2m\bar{H}^2)^{pr_1}}{(p-1)!}. \tag{21}$$

Wegen (2) ist der Realteil von $\alpha = \alpha_1$ kleiner als $\log 2$, so daß e^z für jedes z der Strecke von πi nach α_1 absolut $< e^{\log 2} = 2$ ist, also

$$|e^{\alpha_1}+1| = \left|\int_{\pi i}^{\alpha_1} e^z\,dz\right| \leqq \left|\int_{\pi i}^{\alpha_1} 2\,dz\right| = 2|\alpha_1 - \pi i|. \tag{22}$$

Bedeutet h eine natürliche Zahl $\leqq m$, so ist wegen (13)

$$|e^{\alpha_h}+1| \leqq |e^{\alpha_h}|+1 \leqq e^{|\alpha_h|}+1 \leqq e^{\bar{H}}+1 < 2e^{\bar{H}},$$

so daß aus (7) und (22) folgt

$$|R| = |e^{\alpha_1}+1|\,|e^{\alpha_2}+1|\ldots|e^{\alpha_m}+1| < 2^m e^{m\bar{H}}|\alpha - \pi i|,$$

und hieraus findet man mit Rücksicht auf (20) und (21)

$$(rp+p-1)!\,\frac{2^m e^{m\bar{H}}(2m\bar{H}^2)^{pr_1}}{(p-1)!}|\alpha - \pi i| > \frac{1}{2};$$

nach (18) ist daher

$$(rp+p-1)!\,|\alpha - \pi i| > 1,$$

also wegen $r_1 = 2^m \geqq r+1$

$$(r_1 p)!\,|\alpha - \pi i| > 1,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2[5]). *Es gibt eine absolute positive Konstante C_2 derart daß für jedes $g \geqq C_2$ das Intervall*

$$g < x \leqq g + \frac{g}{\log g} \tag{23}$$

wenigstens eine Primzahl enthält.

Hilfssatz 3. *Genügt α einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grade m und von der Höhe $\bar{H}$, so gibt es eine nur von m abhängige Zahl μ derart, daß*

$$|\alpha - \pi i| > 2^{-\bar{H}^\mu}.$$

Beweis. Es werde $2^m = r_1$ gesetzt. Nach Hilfssatz 1 gibt es eine nur von m abhängige Zahl C_1 derart, daß für jede Primzahl p mit

$$p > C_1 \bar{H}^{2r_1}$$

die Ungleichung

$$(r_1 p)!\,|\alpha - \pi i| > 1$$

gilt.

[5]) Vgl. den Hilfssatz 4 meines in Fußnote 1 erwähnten Aufsatzes.

Ich setze $C_3 = C_1 + C_2 + 1$, wo C_2 die im Hilfssatz 2 genannte Zahl ist.

Bezeichnet p die kleinste Primzahl $> C_3 \overline{H}^{2r_1}$, so ist nach dem Obigen

$$(r_1 p)! \, |\alpha - \pi i| > 1. \tag{24}$$

Wegen $\overline{H} \geqq 1$ und $C_3 > C_2$ ist

$$C_3 \overline{H}^{2r_1} > C_2.$$

Setzen wir $g = C_3 \overline{H}^{2r_1}$ und $C_4 = C_3 \left(1 + \frac{1}{\log C_3}\right)$ ($\log C_3$ ist positiv wegen $C_3 > 1$), so gilt wegen $\overline{H} \geqq 1$

$$g + \frac{g}{\log g} = C_3 \overline{H}^{2r_1} \left(1 + \frac{1}{\log C_3 + 2r_1 \log \overline{H}}\right) \leqq C_3 \left(1 + \frac{1}{\log C_3}\right) \overline{H}^{2r_1} = C_4 \overline{H}^{2r_1},$$

so daß es nach Hilfssatz 2 im Intervall

$$C_3 \overline{H}^{2r_1} < x \leqq C_4 \overline{H}^{2r_1}$$

wenigstens eine Primzahl gibt. Hieraus folgt

$$p \leqq C_4 \overline{H}^{2r_1},$$

und aus (24)

$$(r_1 p)^{r_1 p} \, |\alpha - \pi i| > 1,$$

somit

$$(r_1 C_4 \overline{H}^{2r_1})^{r_1 C_4 \overline{H}^{2r_1}} \, |\alpha - \pi i| > 1.$$

Bei unbeschränkt wachsendem $\overline{H}$ strebt das Verhältnis

$$\frac{(r_1 C_4 \overline{H}^{2r_1})^{r_1 C_4 \overline{H}^{2r_1}}}{2^{\overline{H}^{2r_1+1}}}$$

nach Null, so daß es eine nur von m abhängige Zahl $\overline{H}_0$ gibt derart, daß aus $\overline{H} \geqq \overline{H}_0$ folgt

$$2^{\overline{H}^{2r_1+1}} \, |\alpha - \pi i| > 1.$$

Wählen wir nun die nur von m abhängige Zahl μ_0 so, daß aus $\overline{H} < \overline{H}_0$

$$2^{\overline{H}^{\mu_0}} \, |\alpha - \pi i| > 1$$

folgt (was möglich ist, da die Anzahl der Polynome von gegebenem Grade und von gegebener Höhe endlich ist), und bezeichnet μ die größte der Zahlen $2r_1 + 1$ und μ_0, so gilt die Behauptung des Hilfssatzes 3.

Beweis des Satzes. θ genügt einer irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$c_0 + c_1 y + \ldots + c_n y^n = 0,$$

wo $c_n \neq 0$ und $|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n| = H$. Also ist

$$c_0 + c_2 \theta^2 + c_4 \theta^4 + \ldots = -\{c_1 \theta + c_3 \theta^3 + c_5 \theta^5 + \ldots\},$$

und daher

$$c_0 - c_2(\theta i)^2 + c_4(\theta i)^4 - \ldots = i\{c_1(\theta i) - c_3(\theta i)^3 + c_5(\theta i)^5 - \ldots\},$$

folglich

$$(25)\quad \{c_0 - c_2(\theta i)^2 + c_4(\theta i)^4 - \ldots\}^2 = -\{c_1(\theta i) - c_3(\theta i)^3 + c_5(\theta i)^5 - \ldots\}^2,$$

θi erfüllt also eine Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$e_0 + e_1 y + \ldots + e_{2n} y^{2n} = 0,$$

wo $e_{2n} = \pm c_n^2 \neq 0$.

Wegen (25) ist hierin

$$\begin{aligned} |e_0| + |e_1| + \ldots + |e_{2n}| &\leqq \{|c_0| + |c_2| + |c_4| + \ldots\}^2 \\ &\quad + \{|c_1| + |c_3| + |c_5| + \ldots\}^2 \\ &\leqq \{|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n|\}^2 = H^2. \end{aligned}$$

Im Hilfssatz 3 setze ich $\alpha = \theta i$, und es möge

$$e_0 + e_1 y + \ldots + e_{2n} y^{2n} = 0$$

die algebraische Gleichung, welche $\alpha = \theta i$ erfüllt, bezeichnen; es ist also $m = 2n$ und $\overline{H} \leqq H^2$.

Nach Hilfssatz 3 ist

$$2^{\overline{H}^{\mu}} |\alpha - \pi i| > 1,$$

wo μ eine nur von m, also nur von n, abhängige Zahl ist, daher

$$2^{H^{2\mu}} |\theta i - \pi i| > 1,$$

womit die Behauptung (1) mit $\nu = 2\mu$ als richtig erkannt ist.

(Eingegangen am 10. Mai 1928.)

Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.

Von

G. Pólya in Zürich.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

1.—4. Einleitung 550

Erstes Kapitel. Die Messung der Dichte gewisser unendlicher Folgen.

5. Untere und obere Dichte zur Basis $\xi, 1$ 556
6.— 7. Minimaldichte und Maximaldichte 559
8. Additive Eigenschaften 561
9.—11. Maßgleiche Hülle und maßgleicher Kern 562
12. Folgen mit verschwindender unterer Dichte 567
13.—14. Die Rechnung mit meßbaren Folgen 568

Zweites Kapitel. Geometrische Darstellung der Wachstumsverhältnisse der ganzen Funktionen vom Normaltypus der Ordnung Eins.

15. 19. Zusammenstellung von Definitionen und Sätzen über konvexe Bereiche 571
20.—21. Der Borelsche Fall der Laplaceschen Transformation . . . 578
22.—25. Der Indikator, das Indikatordiagramm und das konjugierte Diagramm 581
26.—29. Korollarien 586
30.—31. Das Indikatordiagramm von Summe und Produkt 591
32.—35. Beispiele 593
36.—40. Die regularitätserhaltenden, fortsetzbaren und beschränkten linearen Funktionaloperationen 598
41.—45. Beispiele 603

Drittes Kapitel. Über ganze Funktionen mit Lückenreihen. Seite
46.—49. Ordnung und Typus. Terminologie und Hilfssätze 610
50.—58. Die Analogie zwischen den singulären Punkten auf dem Konvergenzkreis und den Juliaschen Richtungen der ganzen Funktionen unendlicher Ordnung 615
59.—66 Weitere Eigenschaften der ganzen Funktionen von Koeffizientendichte Null 627

Einleitung.

1. Die Entwicklungen dieser Arbeit sind auf die Hadamardsche Aufgabe der Funktionentheorie gerichtet. So bezeichne ich die Aufgabe: Von den Eigenschaften der Koeffizientenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = f(z) \tag{1}$$

auf die Eigenschaften der analytischen Funktion $f(z)$ zu schließen, die durch die Potenzreihe (1) definiert ist[1]).

Die Arbeit besteht aus drei Kapiteln, deren Inhalt in den folgenden Nummern näher beschrieben werden soll. Von der Untersuchung, die ich heute ausführlich darzustellen beginne, habe ich einzelne Teile schon früher angekündigt oder skizziert[2]).

2. Der Gegenstand des ersten Kapitels gehört in die Theorie der unendlichen Folgen und hat mit Funktionentheorie nur mittelbar zu tun, indem er eine (wie mir scheint, unentbehrliche) Vorbereitung zur Untersuchung der „Lücken" der Potenzreihen bildet.

Man betrachte die Potenzreihe (1) und bezeichne die Anzahl derjenigen nichtverschwindenden Koeffizienten, deren Index die positive Zahl r nicht übersteigt, mit $N(r)$. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r)}{r} \tag{2}$$

[1]) Vgl. J. Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, 2. Aufl., Bd. **1**, unter Mitwirkung von Mandelbrojt (Paris, 1926). Ferner L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, Enzyklopädie d. math. Wissenschaften II, C4. Es sei zur Ergänzung der nachfolgenden Literaturnachweise, die etwas sparsam bemessen werden mußten, ein für allemal auf diese beiden Werke verwiesen.

[2]) Vgl. G. Pólya, a) L'Enseignement mathématique **22** (1922), p. 298—299; b) Math. Annalen **89** (1923), S. 179—191; c) Sitzungsberichte der Berliner Akademie (1923), S. 45—50; d) Bulletin de la Société mathématique de France **52** (1924), p. 519—532; e) Proceedings of the London Math. Society (2) **7** (1925) p. XLIV—XLV; f) Comptes Rendus Paris **184** (1927) S. 502—504; g) daselbst **184** (1927), S. 579—581; h) daselbst **184** (1927), S. 1526—1528; i) daselbst **185** (1927), S. 1107—1108; j) Göttinger Nachrichten (1927), S. 187—195.

existiert, soll die Folge der Indizes der nichtverschwindenden Koeffizienten als *meßbar* und der Grenzwert (2) als die *Dichte* der nichtverschwindenden Koeffizienten der Reihe (1), oder kürzer als die Koeffizientendichte der Reihe (1) bezeichnet werden[3]). Im allgemeinen existiert jedoch die Dichte nicht, ebenso wie eine Punktmenge im allgemeinen nicht meßbar ist, und wir müssen uns nach einem Ersatz umsehen. Es werden im ersten Kapitel die folgenden vier Grenzwerte

$$\lim_{\xi\to 1-0}\ \underline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{N(r)-N(r\xi)}{r-r\xi},\quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{N(r)}{r},\quad \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{N(r)}{r},\quad \lim_{\xi\to 1-0}\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{N(r)-N(r\xi)}{r-r\xi}$$

untersucht. Sie existieren stets, sie sind nach der Größe (nichtabnehmend geordnet) aufgezählt, und werden in dieser Reihenfolge

Minimaldichte, untere Dichte, obere Dichte, Maximaldichte

genannt. Alle vier Größen liegen zwischen den Grenzen 0 und 1 und alle vier fallen mit *der* Dichte zusammen, wenn diese existiert; wenn *die* Dichte nicht existiert, sind die untere und die obere Dichte voneinander verschieden.

Für eine Punktmenge sind im allgemeinen die vier folgenden Maße: das innere Jordansche, das innere Borelsche, das äußere Borelsche und das äußere Jordansche Maß voneinander verschieden, und diese viererlei Maße, die hier der Größe nach nicht abnehmend aufgezählt sind, zeigen gewisse Ähnlichkeiten mit den eben aufgezählten viererlei Dichten; jedoch nicht in der Reihenfolge, wie sie aufgezählt sind. Am engsten ist nämlich die Analogie zwischen innerem und äußerem Borelschen Maß einerseits und Minimal- und Maximaldichte andererseits; es gilt nämlich für diese Dichten ein Satz (Satz VIII in Nr. 9), der an die Existenz eines maßgleichen Kernes und einer maßgleichen Hülle in der Theorie des Borelschen Maßes erinnert.

Die erwähnten verschiedenerlei Dichten werden im ersten Kapitel nicht zum Ausspinnen eigentümlicher Analogien eingeführt und untersucht, sondern weil sie geeignet zu sein scheinen diejenigen Eigenschaften der Koeffizientenfolge auszudrücken, die mit der Lage und Natur der Singularitäten am Konvergenzrand zusammenhängen. Es seien einige diesbezüglichen Sätze, die zum Teil im dritten Kapitel, zum Teil erst in einer Fortsetzung dieser Arbeit bewiesen werden können, hier zusammengestellt[4]): Wenn auf dem Konvergenzkreis nur ein einziger singulärer Punkt liegt,

[3]) A. a. O. [2c]) wurde eine Folge, die hier meßbar heißt, glatt genannt. Sonst ist die Terminologie hier dieselbe, wie a. a. O. [2b]) und [2c]), und insbesondere sind die hier und dort gegebenen Definitionen von Maximaldichte und Minimaldichte gleichwertig, obzwar nicht gleichlautend.

[4]) Außer den Sätzen IVa und VIa im dritten Kapitel vgl. noch a. a. O. [2]) die Arbeiten f), g), i), j).

muß die Maximaldichte der Koeffizienten $=1$ sein; die obere Dichte muß zwar positiv sein, kann aber 0 beliebig nahe kommen. Wenn der einzige auf dem Konvergenzkreis gelegene singuläre Punkt s „fast isoliert" ist (d. h. so liegt, daß ein zum Konvergenzkreis konzentrischer, etwas größerer Kreis keine singulären Punkte außerhalb des durch s gehenden Radius enthält), so ist nicht bloß die Maximaldichte, sondern auch die obere Dichte der Koeffizienten $=1$; die untere Dichte kann jedoch $=0$ sein. Wenn der einzige am Konvergenzkreis gelegene singuläre Punkt isoliert und kein Verzweigungspunkt (also ein Pol oder eine wesentliche singuläre Stelle) ist, so existiert die Dichte und ist $=1$. — Betrachten wir nun den Fall mehrerer singulärer Stellen am Konvergenzkreis; wenn sie alle algebraisch-logarithmische Stellen sind, so ist die Minimaldichte der Koeffizienten >0; wenn es unter ihnen mindestens eine isolierte Stelle gibt, so ist die untere Dichte >0; wenn sie einen Bogen des Konvergenzkreises vom Zentriwinkel α freilassen, so ist die Maximaldichte $\geqq \frac{\alpha}{2\pi}$. — Wenn die Dichte der Koeffizienten einer Potenzreihe $=0$ ist, so ist die dargestellte Funktion eindeutig und ihr Existenzbereich ist der Konvergenzkreis der besagten Potenzreihe; hierin besteht der geläufige Fabrysche Lückensatz. Aber auch wenn nur die untere Dichte der Koeffizienten $=0$ ist, kann man noch behaupten, daß die dargestellte Funktion eindeutig und ihr Existenzbereich einfach zusammenhängend ist. Wenn bloß die Minimaldichte $=0$ ist, muß weder die Funktion eindeutig noch der Existenzbereich einfach zusammenhängend sein.

3. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit ganzen Funktionen, deren Anwachsen den Mitteltypus der Ordnung 1 nicht übertrifft, d. h. mit solchen Funktionen $F(z)$, für welche in der ganzen Ebene eine Ungleichung von der Form

$$|F(z)| < Ae^{a|z}$$

gilt, wobei A, a positive Konstanten bedeuten. Jeder solchen Funktion $F(z)$ wird ein der Form, Größe und Lage nach vollständig bestimmter konvexer Bereich in der Ebene der komplexen Zahlen zugeordnet, der im folgenden das *Indikatordiagramm* von $F(z)$ genannt wird. Der Zweck des zweiten Kapitels ist darzutun, daß mancherlei auf $F(z)$ bezügliche wohlbekannte Fragen in Zusammenhang mit dem Indikatordiagramm am einfachsten und vollständigsten erörtert werden können[5]).

a) E. Phragmén und E. Lindelöf[6]) haben der Funktion $F(z)$ eine Funktion $h(\varphi)$ des variablen Winkels φ zugeordnet, die das Anwachsen

[5]) Vgl. a. a. O. [2a]), [2b]).

[6]) E. Phragmén und E. Lindelöf, Acta Mathematica **31** (1908), S. 381—406, insbesondere S. 391—403.

von $F(z)$ in der Richtung φ mißt, d. h. entlang des Halbstrahls, der mit der positiven reellen Achse den Winkel φ einschließt; sie haben verschiedene Eigenschaften der Funktion $h(\varphi)$ gefunden, und insbesondere eine merkwürdige Ungleichung (vgl. Formel (50) in Nr. 25) aufgestellt, der $h(\varphi)$ genügt. Diese Ungleichung kann durch die geometrische Aussage ersetzt werden, daß $h(\varphi)$ die *Stützfunktion* des Indikatordiagramms von $F(z)$ ist, vgl. Nr. 17 und Satz II in Nr. 25; hierbei werden manche Eigenschaften von $h(\varphi)$ geometrisch ohne weiteres ersichtlich (vgl. Nr. 28), und es stellt sich heraus, daß, neben der Periodizität, die besagte Ungleichung die einzige Bedingung ist, der $h(\varphi)$ unterliegt, vgl. Nr. 34.

b) E. Borel[7]) hat mit der Potenzreihe (1) die ganze Funktion

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n z^n}{n!} + \ldots \tag{3}$$

assoziiert; (3) gehört dann und nur dann dem Mitteltypus der Ordnung 1 an, wenn die Potenzreihe (1) einen von 0 und ∞ verschiedenen Konvergenzradius besitzt. Borel hat gezeigt, daß die Singularitäten der Reihe (1) mit dem Anwachsen der Funktion (3) längs verschiedener Halbstrahlen zusammenhängen. Wir gelangen zu einer einfacheren und zugleich vollständigeren Aussage, wenn wir eine Variablentransformation ausführen und anstatt (1), die durch die Reihe

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \ldots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \ldots \tag{4}$$

definierte Funktion betrachten; diese ist ausnahmslos regulär außerhalb des Spiegelbildes des Indikatordiagramms von (3) in bezug auf die reelle Achse und hört auf regulär zu sein in allen extremen Punkten dieses Spiegelbildes (vgl. Satz III). (Extreme Punkte eines konvexen Bereiches werden nach Minkowski solche Randpunkte genannt, die nicht inwendige Punkte eines geradlinigen Begrenzungsstückes sind, z. B. die Ecken eines konvexen Polygons.)

c) Die Singularitäten der Reihe

$$F(0) + F(1)z + F(2)z^2 + \ldots + F(n)z^n + \ldots$$

wurden von Leau, Wigert, Lindelöf, Carlson und vielen anderen untersucht[8]).

[7]) Vgl. E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, 2. durch G. Bouligand neubearbeitete Auflage (Paris, 1928), insbesondere S. 120—179.

[8]) L. Leau, Journal de Mathématiques pures et appliquées (5) **5** (1899), p. 365 à 425; S. Wigert, Oefversigt af K. Vet. Ak. Förhandlingar **57** (1900), p. 1001—1011; E. Lindelöf, Le Calcul des Résidus (Paris, 1905), insbesondere S. 108—141; F. Carlson, a) Sur une classe de séries de Taylor, Thèse Upsala 1914; b) Mathematische Zeitschrift **11** (1921) S. 1—23, insbesondere S. 8—16. Für weitere Zitate vgl. Bieberbach, a. a. O. [1]), S. 461—470.

unter verschiedenen Annahmen betreffend die Funktion $F(z)$. Wird $F(z)$ als eine ganze Funktion vom Exponentialtypus angenommen (dieser Fall ist einer der wesentlichsten), so können diese Singularitäten viel einfacher beschrieben werden nach einer Variablenvertauschung, nämlich bei Zugrundelegung der Form

$$(5) \qquad F(0)+F(1)e^{-z}+F(2)e^{-2z}+\ldots+F(n)e^{-nz}+\ldots,$$

und zwar wieder mit Hilfe des Indikatordiagramms von $F(z)$, vgl. Nr. 43 u. 44.

d) Man kann die unter b) und c) angedeuteten Resultate als spezielle Fälle eines allgemeineren Satzes auffassen, der sich auf eine gewisse Klasse von linearen Funktionaloperationen bezieht, die von S. Pincherle eingeführt[9]) und in Anwendung auf Dirichletsche Reihen von H. Cramér betrachtet wurde[10]). Die Reihen (4) und (5) werden durch die Anwendung einer solchen Funktionaloperation aus der Funktion z^{-1} bzw. aus $(1-e^{-z})^{-1}$ erzeugt, und bei Beschreibung aller durch die Funktionaloperation erzeugten Funktionen spielt das Indikatordiagramm eine wesentliche Rolle, vgl. unter Nr. 36 bis 45.

Das zweite Kapitel ist vom ersten Kapitel, abgesehen von dem in Nr. 33 und 45 behandelten Beispiele, völlig unabhängig.

4. Es soll jetzt die Fragestellung erörtert werden, die zu den Entwicklungen vom dritten Kapitel geführt hat.

G. Julia hat entdeckt[11]), daß zu jeder ganzen Funktion $G(z)$ mindestens ein vom Nullpunkt auslaufender Halbstrahl gehört, so beschaffen, daß die Funktion $G(z)$ in jedem vom Halbstrahl halbierten Winkelraum (also insbesondere auch in Winkelräumen mit beliebig kleinem Öffnungswinkel) alle komplexen Werte, höchstens mit Ausnahme eines einzigen Wertes, unendlich oft annimmt. Die Richtungen der Halbstrahlen von besagter Beschaffenheit sollen im folgenden als die *Juliaschen Richtungen von* $G(z)$ bezeichnet werden[12]). Z. B. hat die Funktion e^z genau zwei Juliasche Richtungen, die Richtung der positiven und die der negativen imaginären Achse.

[9]) S. Pincherle, a) Memorie della R. Accademia delle Scienze, Bologna (4) **9** (1888), p. 45—71 (wiederabgedruckt in den Acta Mathematica **48** (1926), S. 279—304); b) Equations et opérations fonctionnelles, Encyclopédie des Sciences Math. II 26.

[10]) H. Cramér, Arkiv för Mat., Astr. och Fysik **13** (1918) Nr. 22.

[11]) Vgl. G. Julia, Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé (Paris, 1924).

[12]) Die Richtungen, die hier als Juliasche bezeichnet worden sind, heißen in der Terminologie von G. Valiron Picardsche Richtungen, vgl. Bul etin des Sciences mathématiques (2) **49** (1925), p. 270—275. In den Untersuchungen von Valiron, wo es sich um eine Unterscheidung mehrerer nahe verwandter Begriffe handelt, ist wohl seine Terminologie vorzuziehen, hier aber scheint mir die im Text gegebene Bezeichnung angebracht zu sein.

A. Bloch hat bemerkt, daß hierdurch eine gewisse Analogie zwischen den ganzen Funktionen, d. h. Potenzreihen mit unendlichem Konvergenzradius und den Potenzreihen mit endlichem Konvergenzradius entstanden ist: Jede Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius hat mindestens eine Juliasche Richtung, jede mit endlichem Konvergenzradius mindestens einen singulären Punkt auf dem Konvergenzkreis. Und er stellte die bemerkenswerte Frage[13]): Läßt sich diese Analogie zwischen den Juliaschen Richtungen und den singulären Punkten auf dem Konvergenzkreis weiter verfolgen?

Nun gibt es einen Fall, in dem zwischen gewissen ausgezeichneten Richtungen einer ganzen Funktion und den singulären Punkten einer Potenzreihe nicht bloß Analogie, sondern eindeutige Zuordnung besteht. Wenn wir nach E. Borel[7]) mit der Potenzreihe (1) von endlichem Konvergenzradius die mit denselben Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ aufgebaute ganze Funktion (3) assoziieren und von dem Nullpunkt aus durch sämtliche singulären Punkte auf dem Konvergenzkreis der Potenzreihe (1) Halbstrahlen ziehen, erhalten wir genau die Halbstrahlen, denen entlang die assoziierte ganze Funktion (3) am raschesten anwächst. (Für die genaue Fassung vgl. den Hilfssatz 2 unter Nr. 50.)

Jeder Satz über singuläre Punkte auf der Konvergenzgrenze verwandelt sich so in einen Satz über Richtungen raschesten Anwachsens von ganzen Funktionen. Zunächst kommen allerdings nur die speziellen ganzen Funktionen in Betracht, die als assoziierte Funktionen von Potenzreihen auftreten können (die Funktionen vom Normaltypus der Ordnung 1). Es ist aber von vornherein unwahrscheinlich, daß die Richtungen des stärksten Anwachsens für diese speziellen Funktionen besondere Qualitäten zeigen, und in der Tat liefert in vielen Fällen eine passende Wendung der Beweise Sätze über ganze Funktionen beliebiger Ordnung.

Nun gibt es einen Fall, in dem die Richtungen des raschesten Anwachsens sicherlich Juliasche Richtungen sind: Das ist der Fall der ganzen Funktionen unendlicher Ordnung, wie das leicht aus Untersuchungen von L. Bieberbach folgt (das Nötige ist in Hilfssatz 3 unter Nr. 50 formuliert).

Hierdurch ist der Weg zu einer teilweisen Beantwortung der Blochschen Fragestellung vorgezeichnet[14]): Man nehme irgendeinen Satz über Koeffizienten und singuläre Punkte an der Konvergenzgrenze der Potenz-

[13]) A. Bloch, Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité (Mémorial des sciences mathématiques, Heft 20), vgl. S. 16. Herr W. Saxer, dem ich die Kenntnis dieser bemerkenswerten Stelle verdanke, hat mit seinen interessanten Untersuchungen, deren Ziel den hiesigen Sätzen IIIb und VIb verwandt war, zur Entstehung des Kapitels III den Anstoß gegeben; er benutzte später zu erwähnende Methoden von Wiman, vgl. a. a. O. [58]).

[14]) Vgl. a. a. O. [2b]).

reihen, etwa — um sofort das merkwürdigste Beispiel zu nennen — den Fabryschen Lückensatz: *Für eine Potenzreihe von endlichem Konvergenzradius und von Koeffizientendichte Null sind alle Punkte des Konvergenzkreises singulär.* Dies kann auch als eine Aussage über spezielle ganze Funktionen (vom Normaltypus der Ordnung 1) gelesen werden. Der Beweis ist aber, wenn richtig eingerichtet, auf irgendwelche ganzen Funktionen übertragbar, und wir steigen zu einem allgemeineren Satz hinauf, der etwas ungenau, aber anschaulich so gefaßt werden kann: *Für eine Potenzreihe von unendlichem Konvergenzradius und von Koeffizientendichte Null ist das Anwachsen in allen Winkelräumen gleich stark.* Wenn aber eine Funktion in einem Winkelraum mit der Ordnung α anwächst, nimmt sie daselbst, nach Bieberbach, alle Werte, höchstens mit Ausnahme eines einzigen Wertes, unendlich oft an. Uns hierauf stützend, steigen wir zu folgendem spezielleren Satz hinunter: *Für eine ganze Funktion unendlicher Ordnung von Koeffizientendichte Null sind alle Richtungen Juliasche Richtungen.* (Vgl. die Sätze VIa, VI und VIb im dritten Kapitel.)

Auf diese Weise lassen sich die prägnantesten Sätze über die Situation der Singularitäten auf dem Konvergenzkreis zuerst durch Verallgemeinerung auf das Anwachsen ganzer Funktionen in Winkelräumen und dann durch Spezialisierung auf die Juliaschen Geraden der Funktionen unendlicher Ordnung übertragen (vgl. Nr. 50 bis 58). Die angewandten Schlüsse führen zu weiteren Anwendungen. Ich möchte hier den Satz VII hervorheben, der gewissermaßen „erklärt", warum die Exponentialreihe die Koeffizientendichte 1 und die Kosinusreihe die Koeffizientendichte $\frac{1}{2}$ besitzt, und den Satz IX, der im Rahmen einer schärferen Aussage insbesondere die Tatsache enthält, daß *eine ganze Funktion endlicher Ordnung, deren Koeffizientendichte Null ist, keinen endlichen asymptotischen Wert besitzen kann*[15]).

Was im dritten Kapitel von den beiden vorhergehenden Kapiteln gebraucht wird, wurde, um die Lektüre zu erleichtern, in wenige Hilfssätze zusammengedrängt.

Erstes Kapitel.

Die Messung der Dichte gewisser unendlicher Folgen.

Untere und obere Dichte zur Basis ξ, 1.

5. Wir betrachten eine wachsende unendliche Folge von nichtnegativen Zahlen

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots, \tag{1}$$

[15]) Vgl. a. a. O. [2h]).

die so beschaffen sind, daß der Abstand zweier konsekutiver eine positive untere Schranke p besitzt. In Zeichen:

$$\lambda_1 \geqq 0, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq p > 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Hieraus folgt, daß

$$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots \tag{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty. \tag{4}$$

Die Anzahl derjenigen Glieder der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, die r nicht übersteigen, sei mit $N(r)$ bezeichnet. Es ist also

$$N(r) = n \quad \text{für} \quad \lambda_n \leqq r < \lambda_{n+1}. \tag{5}$$

$N(r)$ heißt die *Anzahlfunktion* der Folge (1). Wenn der Grenzwert

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r)}{r} \tag{6}$$

existiert, wird er als die *Dichte* der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ bezeichnet und die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ selbst wird *meßbar* genannt. Im allgemeinen ist eine Folge nicht meßbar, d. h. ihre Dichte existiert nicht.

Auf alle Fälle existieren die Grenzwerte

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r) - N(r\xi)}{r - r\xi} = d(\xi), \qquad \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r) - N(r\xi)}{r - r\xi} = D(\xi) \tag{7}$$

bei festem ξ, $0 \leqq \xi < 1$. Es wird im folgenden $d(\xi)$ die *untere Dichte zur Basis* $\xi, 1$ und $D(\xi)$ die *obere Dichte zur Basis* $\xi, 1$ der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ genannt[16]).

Es empfiehlt sich (hauptsächlich für den Gebrauch in den späteren Kapiteln) diese lange Bezeichnung in dem wichtigsten Falle, in dem die Basis möglichst breit, nämlich 0, 1 ist, etwas abzukürzen. Unter *der* unteren Dichte schlechthin, ohne nähere Qualifikation der Basis, wird stets $d(0)$, unter *der* oberen Dichte $D(0)$ verstanden. Die Dichte, die untere und die obere Dichte können ersichtlicherweise auch durch

$$\lim_{n \to \infty} n \lambda_n^{-1}, \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}} n \lambda_n^{-1}, \qquad \overline{\lim_{n = \infty}} n \lambda_n^{-1}$$

definiert werden[17]).

Satz I. *Für irgendeine Folge* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, *die die Bedingung* (2) *erfüllt, sind* $d(\xi)$ *und* $D(\xi)$, *die untere und obere Dichte zur Basis* $\xi, 1$,

[16]) Die Bezeichnungen $d(\xi), D(\xi)$ sind hier in anderer Bedeutung gebraucht, als a. a. O. [2c]) S. 48 und ff.

[17]) Vgl. z. B. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1925) Bd. 1 Nr. II 148, S. 67 und 231.

stetige Funktionen von ξ für $0 \leqq \xi < 1$. Es ist

$$0 \leqq d(\xi) \leqq d(0) \leqq D(0) \leqq D(\xi) \leqq \frac{1}{p}. \tag{8}$$

Ich will einige Rechenregeln mit $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$, die zum Beweis des Satzes I wie auch später wiederholt gebraucht werden, hierher setzen: Es ist

$$\begin{aligned} \underline{\lim}\, \Phi + \underline{\lim}\, \varphi &\leqq \underline{\lim}\,(\Phi + \varphi) \leqq \underline{\lim}\, \Phi + \overline{\lim}\, \varphi, \\ \overline{\lim}\, \Phi + \underline{\lim}\, \varphi &\leqq \overline{\lim}\,(\Phi + \varphi) \leqq \overline{\lim}\, \Phi + \overline{\lim}\, \varphi. \end{aligned} \tag{9}$$

Nach den getroffenen Festsetzungen ist $1 - \xi > 0$, $N(r) - N(r\xi) \geqq 0$, und somit folgt die erste Ungleichung unter (8) unmittelbar aus der Definition (7). Die letzte Ungleichung unter (8) sowie die etwas mehr besagende

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r\eta) - N(r\xi)}{r} \leqq \frac{\eta - \xi}{p} \qquad (0 \leqq \xi < \eta) \tag{10}$$

folgen unmittelbar aus der Voraussetzung (2). Die mittlere Ungleichung unter (8) ergibt sich auch ohne weiteres aus der Definition (7). Man schließt aus der Identität

$$\frac{N(r)}{r} = (1 - \xi)\frac{N(r) - N(r\xi)}{r - r\xi} + \xi \frac{N(r\xi)}{r\xi}$$

nach Definition (7) und gemäß den Rechenregeln (9), daß

$$d(0) \geqq (1 - \xi)\, d(\xi) + \xi\, d(0), \qquad D(0) \leqq (1 - \xi)\, D(\xi) + \xi\, D(0)$$

und folglich

$$d(0) \geqq d(\xi), \qquad D(0) \leqq D(\xi).$$

Hiermit sind alle fünf unter (8) vereinigten Ungleichungen bewiesen.

Es sei nun

$$0 \leqq \xi < \eta < 1.$$

Wir schließen aus der Identität

$$(1 - \xi)\frac{N(r) - N(r\xi)}{r - r\xi} = (1 - \eta)\frac{N(r) - N(r\eta)}{r - r\eta} + \frac{N(r\eta) - N(r\xi)}{r}$$

unter Benutzung von (7), (9), (10), daß

$$\begin{aligned} (1 - \eta)\, d(\eta) &\leqq (1 - \xi)\, d(\xi) \leqq (1 - \eta)\, d(\eta) + \frac{\eta - \xi}{p}, \\ (1 - \eta)\, D(\eta) &\leqq (1 - \xi)\, D(\xi) \leqq (1 - \eta)\, D(\eta) + \frac{\eta - \xi}{p}, \end{aligned}$$

also daß

$$-\frac{1}{p} \leqq \frac{(1 - \eta)\, d(\eta) - (1 - \xi)\, d(\xi)}{\eta - \xi} \leqq 0, \qquad -\frac{1}{p} \leqq \frac{(1 - \eta)\, D(\eta) - (1 - \xi)\, D(\xi)}{\eta - \xi} \leqq 0. \tag{11}$$

(11) besagt, daß die Funktionen $(1 - \xi)\, d(\xi)$ und $(1 - \xi)\, D(\xi)$ nie zunehmen und einer Lipschitzschen Bedingung genügen, wenn $0 \leqq \xi < 1$. Hiermit ist Satz I vollständig bewiesen.

Satz II. *Gibt es zwei Werte* ξ *und* η, $0 \leqq \xi < 1$, $0 \leqq \eta < 1$, *so beschaffen, daß*

$$d(\xi) = D(\eta) \tag{12}$$

ist, so ist die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ *meßbar. Wenn die Folge* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ *meßbar ist, besteht* (12) *für alle Werte* ξ, η $(0 \leqq \xi < 1,\ 0 \leqq \eta < 1)$ *und der gemeinsame Wert beider Seiten ist die Dichte der Folge.*

Besteht (12), so folgt daraus und aus (8), daß $d(0) = D(0)$, d. h.

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} r^{-1} N(r) = \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-1} N(r)$$

ist, also die Existenz von (6). Aus der Existenz von (6) folgt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r) - N(r\xi)}{r - r\xi} = \frac{1}{1-\xi} \lim_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r} - \frac{\xi}{1-\xi} \lim_{r\to\infty} \frac{N(r\xi)}{r\xi} = \lim_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r}.$$

Minimaldichte und Maximaldichte.

6. Die Funktionen $d(\xi)$, $D(\xi)$ der Veränderlichen ξ sind durch (7) nur für $0 \leqq \xi < 1$ definiert. Man kann aber ihre Definition mit Beibehaltung der Stetigkeit auf das abgeschlossene Intervall $0 \leqq \xi \leqq 1$ ausdehnen.

Satz III. *Es existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{\xi\to 1-0} d(\xi) = d(1), \qquad \lim_{\xi\to 1-0} D(\xi) = D(1) \tag{13}$$

und es bestehen die Ungleichungen

$$d(1) \leqq d(\xi) \leqq d(0) \leqq D(0) \leqq D(\xi) \leqq D(1). \tag{14}$$

Die durch (7) nicht definierbaren Werte $d(1)$, $D(1)$ werden also durch (13) definiert. Es wird im folgenden $d(1)$ die *Minimaldichte* und $D(1)$ die *Maximaldichte* der Folge genannt. Diese Benennungen sind durch (14) gerechtfertigt.

Um Satz III darzutun, brauche ich eine Hilfsformel. Aus der leicht ersichtlichen Identität

$$\frac{1}{1-\xi^n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{N(r\xi^{\nu-1}) - N(r\xi^{\nu})}{r\xi^{\nu-1} - r\xi^{\nu}} (\xi^{\nu-1} - \xi^{\nu}) = \frac{N(r) - N(r\xi^n)}{r - r\xi^n}$$

folgt durch (wiederholte) Anwendung der Rechenregeln (9) und der Definition (7) für $0 < \xi < 1$

$$d(\xi) \leqq d(\xi^n), \qquad D(\xi) \geqq D(\xi^n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

Es wird genügen, die erste Gleichung unter (13) und die erste Ungleichung unter (14) zu beweisen (mit Hinsicht auf Symmetrie und (8)),

d. h. die Existenz und Haupteigenschaft der Minimaldichte darzutun. Es sei m die untere Grenze der Werte der Funktion $d(\xi)$ im Intervall $0 < \xi < 1$. Es ist also

$$d(\xi) \geqq m \quad \text{für} \quad 0 < \xi < 1 \tag{16}$$

und zu gegebenem ε, $0 < \varepsilon < 1$, existiert ein γ, $0 < \gamma < 1$, so beschaffen, daß

$$d(\gamma) < m + \varepsilon. \tag{17}$$

Es sei ξ so gewählt, daß

$$1 - \varepsilon(1 - \gamma) < \xi < 1, \tag{18}$$

also sicher $\xi > \gamma$. Es gibt somit eine ganze Zahl n, $n \geqq 2$, so beschaffen, daß

$$\xi^n \leqq \gamma < \xi^{n-1} \leqq \xi. \tag{19}$$

Es folgt durch sukzessive Beachtung von (19), (11), (15), (18), (17)

$$(1 - \gamma) d(\gamma) \geqq (1 - \xi^{n-1}) d(\xi^{n-1}) \geqq (1 - \xi^{n-1}) d(\xi),$$

$$d(\xi) \leqq d(\gamma) \frac{1 - \gamma}{1 - \xi^{n-1}} = d(\gamma)\left(1 + \frac{\xi^{n-1} - \gamma}{1 - \xi^{n-1}}\right),$$

$$\xi^{n-1} - \gamma \leqq \xi^{n-1}(1 - \xi) < 1 \cdot \varepsilon(1 - \gamma) \leqq \varepsilon(1 - \xi^n),$$

$$\frac{\xi^{n-1} - \gamma}{1 - \xi^{n-1}} < \varepsilon \frac{1 - \xi^n}{1 - \xi^{n-1}} < \varepsilon \frac{n}{n-1} \leqq 2\varepsilon,$$

$$d(\xi) \leqq d(\gamma)(1 + 2\varepsilon) < (m + \varepsilon)(1 + 2\varepsilon). \tag{20}$$

Da ε beliebig nahe an 0 gewählt werden kann (die Wahl von ε beeinflußt γ und die linke Seite von (18) und damit die Variabilität von ξ), beweisen (16) und (20) zusammen, daß

$$\lim_{\xi \to 1-0} d(\xi) = m \leqq d(\xi)$$

ist, d. h. den in Aussicht gestellten Teil von (13) und (14)[18]).

Daß der Beweis nicht ganz einfach ausfallen konnte, rührt von dem Umstande her, daß die Funktion $d(\xi)$, obzwar sie ihr Maximum am linken und Minimum am rechten Endpunkt des Intervalles 0, 1 erreicht und der Ungleichung (15) genügt, im allgemeinen keineswegs monoton ist, wie geeignete Beispiele zeigen.

---

[18]) Der Satz über die Existenz einer Minimaldichte ($\leqq \infty$) bleibt bestehen, wenn man die Voraussetzung (2) fallen läßt und nur die weniger einschränkenden Bedingungen (3) und (4) benutzt. Ähnliches gilt, wie leicht zu erkennen, noch für einige andere Sätze dieses Kapitels.

7. Ich behaupte, daß bei voneinander unabhängig ins Unendliche rückenden r und h

$$(21) \qquad d(1) \geqq \lim_{\substack{r\to\infty \\ h\to\infty}} \frac{N(r+h)-N(r)}{h}, \qquad D(1) \leqq \overline{\lim_{\substack{h\to\infty \\ r\to\infty}}} \frac{N(r+h)-N(r)}{h}.$$

In der Tat, wenn bei festem ξ, $0 < \xi < 1$, zwischen r und h die Bindung $(r+h)\xi = r$ bestehen würde, bedeuteten die rechten Seiten in (21), nach Definition (7), $d(\xi)$ bzw. $D(\xi)$. Werden also die linken Seiten bzw. durch $d(\xi)$ und $D(\xi)$ ersetzt, so entstehen offenbar richtige Ungleichungen, aus denen die behaupteten gemäß (13) folgen.

Es kann bemerkt werden, daß durch die rechten Seiten unter (21) zwei weitere Arten von „Dichte" dargestellt sind, die jedoch weniger Aufmerksamkeit zu verdienen scheinen, als die bisher eingeführten und hier keinen besonderen Namen erhalten sollen.

Additive Eigenschaften.

8. Es sei nun die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ in zwei zueinander komplementäre Teilfolgen $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \ldots$ und $\lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3'', \ldots$ zerlegt, d. h. diese Teilfolgen sollen elementenfremd sein und zusammen die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ ausmachen. Die Anzahlfunktion von $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \ldots$ sei $N_1(r)$, die von $\lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3'', \ldots$ sei $N_2(r)$, die unteren und oberen Dichten der beiden Teilfolgen zur Basis ξ, 1 sollen bzw. $d_1(\xi)$, $d_2(\xi)$, $D_1(\xi)$, $D_2(\xi)$ heißen. Es ist

$$N_1(r) + N_2(r) = N(r).$$

Wir schließen aus

$$\frac{N_1(r)-N_1(r\xi)}{r-r\xi} + \frac{N_2(r)-N_2(r\xi)}{r-r\xi} = \frac{N(r)-N(r\xi)}{r-r\xi}$$

mit Hilfe der Regeln (9) und auf Grund der Definition (7), daß

$$(22) \qquad d_1(\xi) + d_2(\xi) \leqq d(\xi) \leqq D_1(\xi) + d_2(\xi) \leqq D(\xi) \leqq D_1(\xi) + D_2(\xi)$$

für $0 \leqq \xi < 1$. Es folgt aus Satz III, daß (22) auch für $\xi = 1$ gültig bleibt. Was die hier definierten verschiedenen Dichten an additiven Eigenschaften besitzen, ist in Ungleichung (22) enthalten. Diejenigen Eigenschaften, die später eine Rolle spielen werden, sind in den folgenden Sätzen formuliert.

Satz IV. *Die untere (obere) Dichte einer Folge zur Basis ξ, 1 ist nie kleiner, als die untere (obere) Dichte irgendeiner ihrer Teilfolgen zur selben Basis* $(0 \leqq \xi \leqq 1)$.

Die Ungleichungen $d_1(\xi) \leqq d(\xi)$, $D_1(\xi) \leqq D(\xi)$ folgen, da $d_2(\xi) \geqq 0$ ist, aus (22).

Satz V. *Eine meßbare Folge von Dichte Δ sei in zwei komplementäre Teilfolgen zerlegt, und zwar sei $D_1(\xi)$ die obere Dichte der einen Teilfolge zur Basis $\xi, 1$ und $d_2(\xi)$ die untere Dichte der anderen zur selben Basis $(0 \leqq \xi \leqq 1)$. Dann ist*

$$D_1(\xi) + d_2(\xi) = \Delta.$$

Dies folgt aus (22), da jetzt $d(\xi) = D(\xi) = \Delta$.

Maßgleiche Hülle und maßgleicher Kern.

9. Wir wollen jetzt die Beziehungen verschiedener Folgen zueinander betrachten. Alle Folgen, von deren Dichte (oberer, unterer Dichte, Maximaldichte usw.) in diesem Kapitel die Rede sein wird, sind der Bedingung (2), die den Abstand konsekutiver Glieder betrifft, unterworfen, aber für verschiedene Folgen kann der Wert der darin auftretenden Konstanten p verschieden ausfallen.

Satz VI. *Jede Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ von Minimaldichte $d(1)$ und Maximaldichte $D(1)$ enthält eine Teilfolge, deren Maximaldichte $\leqq d(1)$ ist, und ist enthalten in einer umfassenderen Folge, deren Minimaldichte $\geqq D(1)$ ist.*

Aus irgendeiner Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ kann man (auf mannigfaltige Weise) eine meßbare Teilfolge $\lambda_{\nu_1}, \lambda_{\nu_2}, \lambda_{\nu_3}, \ldots$ von Dichte 0 herausgreifen. Man setzt (etwa) $\lambda_{\nu_1} = \lambda_1$. Wenn λ_{ν_n} schon gewählt und λ_m das kleinste Glied der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ ist, das der Ungleichung $\lambda_m > 2^n \lambda_{\nu_n}$ genügt, setzt man $\lambda_{\nu_{n+1}} = \lambda_m$.

Damit ist die erste Behauptung von Satz VI schon dargetan. Die zweite Behauptung ist durch eine noch willkürlichere Konstruktion leicht darzulegen. Eine (speziellen Zwecken angepaßte) Konstruktion wird beim Beweis des Satzes IX in Nr. 11 beschrieben.

Satz VII. *Die Minimaldichte der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sei $\geqq \Delta$ und die Maximaldichte der in $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ enthaltenen Teilfolge $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \ldots$ sei $\leqq \Delta$. Dann gibt es eine meßbare Folge $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ von Dichte Δ, die in $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ enthalten ist und $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \ldots$ enthält.*

Die unschwierige, aber etwas langwierige Konstruktion der Folge $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ soll unter Nr. 10 beschrieben werden. Das Interesse des Satzes VII besteht darin, daß er zu einer neuen Auffassung der Minimaldichte und der Maximaldichte führt. Wenn man übereinkommt, unter zwei meßbaren Folgen diejenige mit größerer Dichte *dichter* und diejenige mit kleinerer Dichte *dünner* zu nennen, kann man sich so fassen:

Satz VIII. *Die Minimaldichte einer Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ist die Dichte der dichtesten meßbaren Folge, die in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ als Teilfolge enthalten ist,*

und die Maximaldichte von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ist die Dichte der dünnsten meßbaren Folge, die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ als Teilfolge enthält.

Es genügt wohl, unter Voraussetzung der Gültigkeit von Satz VII, nur das über die Maximaldichte in Satz VIII Gesagte hier zu beweisen. Es sei gegeben die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von Maximaldichte $D(1)$. Auf Grund von VI kann man eine Folge von Minimaldichte $\geqq D(1)$ konstruieren, in der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ enthalten ist. Auf Grund von VII kann man aus der neukonstruierten Folge eine meßbare Teilfolge von Dichte $D(1)$ herausgreifen, in der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ noch immer enthalten ist. Auf Grund von IV kann keine Folge, in der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ enthalten ist, eine kleinere Maximaldichte als $D(1)$ besitzen. Auf Grund von II fällt für meßbare Folgen die Maximaldichte mit der Dichte zusammen. Hiermit ist alles gesagt.

(Eine dünnste Folge, die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ enthält, könnte man, um die Analogie der Dichte mit dem Maße der Punktmengen zu unterstreichen, als eine „maßgleiche Hülle von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$" bezeichnen, und eine dichteste Folge, die in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ enthalten ist, als einen „maßgleichen Kern". Diese Bezeichnungen sind für das Folgende entbehrlich.)

10. Wir schreiten zum noch ausstehenden Beweis von Satz VII. Die Anzahlfunktion der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sei $N(r)$, die der Teilfolge $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \ldots$ sei $N_1(r)$ (wie schon früher, unter Nr. 5 und 8). Die Voraussetzung bedeutet, gemäß der Definition (7) und dem Satz III, daß

$$(23) \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N_1(r)-N_1(r\xi)}{r-r\xi} \leqq \Delta \leqq \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r)-N(r\xi)}{r-r\xi}$$

für jedes feste ξ im Intervall $0 \leqq \xi < 1$. Man wende (23) auf $\xi = \frac{k}{k+1}$ an (k positiv ganz); es ergibt sich die Existenz eines r_k, so beschaffen, daß

$$(24) \qquad N\left(\frac{k+1}{k} r\right) - N(r) > \left(\Delta - \frac{1}{k}\right)\frac{r}{k},$$

$$(24') \qquad N_1\left(\frac{k+1}{k} r\right) - N_1(r) < \left(\Delta + \frac{1}{k}\right)\frac{r}{k}$$

$$\text{für } r \geqq r_k.$$

Es sei m_1 die kleinste positive ganze Zahl, so beschaffen, daß $2^{m_1} \geqq r_1$. Es sei m_2 die kleinste positive ganze Zahl, die den Bedingungen $m_2 > m_1$, $2^{m_2} \geqq r_2$ genügt. Wenn schon $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ gewählt sind ($k-1 \geqq 2$), bestimmt man m_k als die kleinste positive ganze Zahl, für welche

$$(25) \qquad \binom{2}{1}^{m_2}\binom{3}{2}^{m_3}\binom{4}{3}^{m_4}\cdots\left(\frac{k}{k-1}\right)^{m_k} \geqq r_k,$$

$$(26) \qquad m_k \geqq k$$

ist. (Es sind (25) und (26) übrigens schon für $k \geqq 2$ erfüllt.) Man bezeichne die Zahlen

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{m_1}, \left(\frac{2}{1}\right)^{m_1+1}, \ldots, \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}, \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\frac{3}{2}, \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2}, \ldots, \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m_3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{m_1}\left(\frac{3}{2}\right)^{m_2}\frac{4}{3}, \ldots$$

in dieser Reihenfolge mit $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$. Es ist also Q_n für $n > m_2 - m_1$ von der Gestalt

$$Q_n = \left(\frac{2}{1}\right)^{m_2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m_3} \cdots \left(\frac{k}{k-1}\right)^{m_k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\nu}, \tag{27}$$

$$0 \leqq \nu < m_{k+1}, \quad n = -(m_1 - 1) + m_2 + m_3 + \ldots + m_k + \nu.$$

Nach Konstruktion besitzen die Zahlen Q_n folgende Eigenschaften: Es ist

$$0 < Q_1 < Q_2 < Q_3 < \cdots \tag{28}$$

$$N(Q_{n+1}) - N(Q_n) > \left(A - \frac{Q_{n+1} - Q_n}{Q_n}\right)(Q_{n+1} - Q_n), \tag{29}$$

$$N_1(Q_{n+1}) - N_1(Q_n) < \left(A + \frac{Q_{n+1} - Q_n}{Q_n}\right)(Q_{n+1} - Q_n), \tag{29'}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = 1, \tag{30}$$

$$\lim_{n \to \infty} (Q_{n+1} - Q_n) = \infty. \tag{31}$$

(28), (29), (29') und (30) folgen unmittelbar aus der Konstruktion (31) wird so bewiesen: Wenn Q_n durch (27) gegeben ist, erhält man gemäß (26) und Konstruktion

$$Q_{n+1} - Q_n = Q_n\left(\frac{Q_{n+1}}{Q_n} - 1\right)$$

$$\geqq \left(\frac{2}{1}\right)^{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} \cdots \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k}\left(\frac{k+1}{k} - 1\right) = \frac{k^k}{k!} \to \infty.$$

Jetzt kann die Wahl der Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ erfolgen. Die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zerfällt in zwei zueinander komplementäre Teilfolgen $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ und $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots$ (Bezeichnung von Nr. 8). Vorerst müssen alle Zahlen $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ zur Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ gehören. Somit gehören zur Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ im Intervall $Q_n < x \leqq Q_{n+1}$ vorerst nicht mehr Zahlen, als die rechte Seite von (29') angibt. Wir wollen noch einige der Zahlen $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots$ zur Ergänzung der Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ auswählen. Und zwar wählen wir so viele im Intervall $Q_n < x \leqq Q_{n+1}$ gelegenen Zahlen $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots$ aus, daß die Anzahl der ϱ_m in diesem Intervall die rechte Seite von (29) übersteigt, aber die um 1 vermehrte rechte Seite von (29') nicht übersteigt (dies ist möglich). Kein im Intervalle $0 \leqq x \leqq Q_1$ gelegenes λ_m'' soll zur Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ gehören.

Bezeichnet man mit $\mathsf{N}(r)$ die Anzahlfunktion der auf diese Art entstandenen Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, so ist

$$\mathsf{N}(Q_1) = N_1(Q_1),$$

$$(32)\quad \left(\Delta - \frac{Q_{n+1}-Q_n}{Q_n}\right)(Q_{n+1}-Q_n) < \mathsf{N}(Q_{n+1}) - \mathsf{N}(Q_n) \leqq \left(\Delta + \frac{Q_{n+1}-Q_n}{Q_n}\right)(Q_{n+1}-Q_n) + 1.$$

Es folgt leicht aus (30), (31), (32), daß

$$(33)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{N}(Q_n)}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{N}(Q_n)-\mathsf{N}(Q_{n-1})}{Q_n - Q_{n-1}} = \Delta.$$

Für $Q_n < r \leqq Q_{n+1}$ ist

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}}\,\frac{\mathsf{N}(Q_n)}{Q_n} \leqq \frac{\mathsf{N}(r)}{r} - \frac{\mathsf{N}(Q_{n-1})}{Q_{n+1}}\,\frac{Q_{n+1}}{Q_n}.$$

Somit folgt aus (30) und (33)

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1}\mathsf{N}(r) = \Delta.$$

D. h. die Folge $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ ist meßbar und ihre Dichte ist Δ. Hiermit ist VII bewiesen.

Zu Beweiszwecken war eine bestimmte Konstruktion der ϱ_m zu bevorzugen, aber offenbar ist die Konstruktion an und für sich sehr willkürlich. Unter anderem (dies spielt eine Rolle in Nummer 11) hätten wir, mit Rücksicht auf (31), die Auswahl der zur Ergänzung herangezogenen λ_m'' im Intervalle $Q_n < x \leqq Q_{n+1}$ nicht unter Einhaltung der beiden in Ungleichung (32) auftretenden Grenzen treffen müssen, sondern wir hätten freien Spielraum zwischen den Grenzen

$$(34)\quad \left(\Delta - \frac{Q_{n+1}-Q_n}{Q_n}\right)(Q_{n+1}-Q_n) = a, \quad \left(\Delta + \frac{Q_{n+1}-Q_n}{Q_n}\right)(Q_{n+1}-Q_n) = b$$

lassen können, wo a, b irgendwelche feste positive Zahlen sind.

11. Bei den späteren Anwendungen wird folgender Satz wiederholt gebraucht:

Satz IX. *Es sei vorgelegt die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, die die Eigenschaft (2) und die Maximaldichte $D(1)$ besitzt. Die Intervalle λ_n, λ_{n+1} seien in Intervalle erster und zweiter Art eingeteilt. Es existiert eine meßbare Folge $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ von folgenden Eigenschaften:*

a) *Es ist $\varrho_1 > \lambda_1$. Jedes Intervall λ_n, λ_{n+1} erster Art enthält eine ungerade, jedes Intervall zweiter Art eine gerade Anzahl Glieder der Folge $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$.*

b) *Es existiert eine Zahl* l, $l>0$, *derart, daß* $\varrho_{m+1}\geqq\varrho_m+l$, $|\varrho_m-\lambda_n|\geqq l$ *für* $m, n=1, 2, 3, \ldots$.

c) *Die Dichte der Folge* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ *ist* $D(1)$.

Hätten wir bloß die Eigenschaft c) nachzuweisen, so könnten wir uns direkt auf Satz VII stützen. Um a), b), c) simultan zu erhalten, müssen wir die Willkürlichkeit, die in der Konstruktion der Nr. 10 steckt, richtig ausnutzen.

Es sei

$$p=4l \tag{35}$$

gesetzt. Die Bedingung (2) nimmt also die Form

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n-2l\geqq\frac{1}{2}(\lambda_{n+1}-\lambda_n) \tag{36}$$

an.

In allen Intervallen λ_n, λ_{n+1} erster Art und nur in diesen konstruiere man den Punkt λ_n+l; die so konstruierten Punkte bezeichne man, aufsteigend numeriert, mit $\mu_1', \mu_2', \mu_3', \ldots$. Es ist klar, daß die Folge $\mu_1', \mu_2', \mu_3', \ldots$ eine Maximaldichte besitzt, die $\leqq D(1)$ ist.

In allen Intervallen λ_n, λ_{n+1} konstruiere man die Punkte

$$\lambda_n+l,\quad \lambda_n+2l,\quad \lambda_n+3l,\quad \ldots,\quad \lambda_n+Ml,$$

wobei M in Intervallen *erster* Art die größte *ungerade* und in Intervallen *zweiter* Art die größte *gerade* Zahl bedeutet, die der Ungleichung

$$\lambda_n+lM\leqq\lambda_{n+1}-l \tag{37}$$

genügt; es ist also entweder M oder $M+1$

$$=\left[\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n-l}{l}\right],$$

$M\geqq 2$. Die so konstruierten Punkte bezeichne man, aufsteigend numeriert, mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$.

Die Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ enthält also $\mu_1', \mu_2', \ldots$ als Teilfolge. Diejenigen Glieder der Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$, die nicht zu $\mu_1', \mu_2', \ldots$ gehören, seien aufsteigend numeriert mit $\mu_1'', \mu_2'', \ldots$ bezeichnet. Nach Konstruktion besitzt die Folge $\mu_1'', \mu_2'', \ldots$ in jedem Intervalle λ_n, λ_{n+1}, sei es erster oder zweiter Art, eine gerade Anzahl von Gliedern; und zwar gehört das Paar μ_{2m-1}'' und μ_{2m}'' demselben Intervalle λ_n, λ_{n+1} an.

Für die in (37) auftretende ganze Zahl M gilt gemäß dem Gesagten und (36), (35), (2)

$$M\geqq\left[\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n-2l}{l}\right]\geqq\left[\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{2l}\right] \tag{38}$$

$$=\left[2\,\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{p}\right]>2\,\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{p}-1\geqq\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{p}.$$

Hieraus ist leicht zu schließen (vgl. (21); in „großen" Intervallen λ_n, λ_{n+1} ist die Anzahl der μ_m sogar $\sim 4p^{-1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$), daß die Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ eine Minimaldichte besitzt, die $\geqq p^{-1}$, also nach (8) sicher $\geqq D(1)$ ist.

Es sei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ eine Folge, die $\mu_1', \mu_2', \ldots$ enthält, in $\mu_1, \mu_2, \ldots$ enthalten ist und die Glieder von $\mu_1'', \mu_2'', \ldots$ nur *paarweise* aufnimmt; das heißt, es sollen entweder beide Glieder μ_{2m-1}'', μ_{2m}'' oder es soll keines dieser beiden Glieder zu $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ gehören $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Dann erfüllt $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die im Satz IX ausgesprochenen Bedingungen a), b). Die Minimaldichte der Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ist $\geqq D(1)$, die Maximaldichte der Folge $\mu_1', \mu_2', \ldots$ ist $\leqq D(1)$, und so läßt sich durch geringe Modifikation des unter 10 dargelegten Beweises von Satz VII die Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ so konstruieren, daß sie auch die Bedingung c) des Satzes IX erfüllt. (Die „paarweise" Auswahl der μ_k'' ist bei Einhaltung der Grenzen (34) mit $a = b = 1$ offenbar möglich.)

Folgen mit verschwindender unterer Dichte.

12. Der folgende Satz besitzt kein direktes Analogon in der Theorie des Maßes der Punktmengen, ist aber bei der Untersuchung gewisser Potenzreihen nützlich.

Satz X. *Die untere Dichte der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zur Basis $\xi, 1$ verschwindet dann und nur dann, wenn die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sich in zwei zueinander komplementäre Teilfolgen $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ und $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots$ zerlegen läßt, deren erstere meßbar und von der Dichte 0 ist, während die letztere der Bedingung*

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\lambda_{n+1}''}{\lambda_n''} \geqq \frac{1}{\xi} \tag{39}$$

genügt $(0 \leqq \xi < 1)$.

Für $\xi = 0$ ist die rechte Seite von (39) als ∞ zu lesen, für $\xi = 1$ wird die Bedingung (39) nichtssagend, vgl. (2). Daß aus einer Zerlegung der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in zueinander komplementäre Teilfolgen von der angegebenen Beschaffenheit $d(\xi) = 0$ folgt, ist aus den Definitionen, vgl. insbesondere (7), und aus der Stetigkeit der Funktion $d(\xi)$ bei variabler ξ, vgl. Satz I, sofort abzulesen. Die Umkehrung, wobei wir also von $d(\xi) = 0$ auszugehen haben, erfordert eine Konstruktion, die in den beiden Fällen $\xi = 0$ und $0 < \xi < 1$ etwas verschieden ausfällt. Es wird genügen, den (etwas einfacheren) Fall $\xi = 0$ zu betrachten.

Es sei $d(0) = 0$. Es sei $r_1 = 0$ gesetzt. Wenn $k \geqq 2$ und r_{k-1} schon definiert ist, sei r_k folgenden beiden Bedingungen gemäß gewählt:

a) Es ist $r_k > (k-1) r_{k-1}$ und es befindet sich mindestens ein Glied der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ im Intervall $(k-1) r_{k-1} < x \leqq r_k$.

b) Es ist

$$\frac{N(kr_k)}{kr_k} < \frac{1}{k^2}.$$

Die Bedingung b) ist wegen $d(0) = 0$ erfüllbar. Es sei angenommen, daß die Intervalle

$$r_k < x \leqq kr_k \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots) \tag{40}$$

unendlich viele Glieder der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ enthalten. (Sonst zeigt die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ selbst die für $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots$ zu beweisende Eigenschaft (39) — jetzt $\xi = 0$ — und die Konstruktion vereinfacht sich, vgl. den Beweis von VI.) Zur Folge $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ sollen diejenigen Glieder der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gehören, die in den Intervallen (40) enthalten sind, und zu $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots$ diejenigen, die in diesen Intervallen (40) nicht enthalten sind. Es gibt, nach a), zwei *sukzessive* Glieder in der Folge $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots$, deren erstes $\leqq r_k$ und deren zweites $> kr_k$ ist, $k = 2, 3, \ldots$; hieraus folgt (39) mit $\xi = 0$. Wird die Anzahlfunktion der Teilfolge $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ mit $N_1(r)$ bezeichnet (wie unter 8), so ist für $r_k < r \leqq r_{k+1}$

$$N_1(r) \leqq N(kr_k), \qquad \frac{N_1(r)}{r} < \frac{N(kr_k)}{r_k} < \frac{1}{k} \tag{41}$$

nach Konstruktion und gemäß Bedingung b). Aus (41) folgt, daß die Folge $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ die Dichte 0 besitzt.

Die Rechnung mit meßbaren Folgen.

13. Der folgende Satz ist etwas schwerfällig, auch nicht im vollen Umfang für die späteren Entwicklungen nötig (nur die Beispiele in Nr. 14 werden wiederholt herangezogen), aber, eben wegen seiner allgemeinen Fassung, sehr einfach zu beweisen[19]).

Satz XI. *Es sei* $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ *eine meßbare Folge von der Dichte* Δ, $\Delta \geqq 0$. *Die positive Zahl* l $(l > 0)$ *sei so beschaffen, daß*

$$\varrho_1 \geqq l, \qquad \varrho_{m+1} - \varrho_m \geqq l \quad \textit{für} \quad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{42}$$

Die Funktion $f(x)$ *sei reellwertig und für reelle positive Werte von* x *definiert, eventuell mit Ausnahme des Wertes* $x = 1$. *Die Zahl* α $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$ *sei so beschaffen, daß* $f(x)$ *in den Intervallen* $0, \alpha$ *und* α^{-1}, ∞ *von konstantem Vorzeichen und dem Betrage nach monoton abnehmend ist. Ferner soll* $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ *existieren.*

r *sei eine gegen* $+\infty$ *strebende Veränderliche.*

[19]) Vgl. für ähnliche Sätze Pólya und Szegö, a. a. O. [17]) 1, S. 67—69 und 230—234.

Die weiteren Annahmen über $f(x)$ und r sind miteinander verbunden und können auf zwei Arten getroffen werden. Entweder sei

1. *$f(x)$ beschränkt und im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel im Intervalle (α, α^{-1}) und r durchlaufe alle positiven Werte.*

Oder sei

2. *$f(x)$ beschränkt und im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel in den beiden getrennten Intervallen $\alpha, 1-\alpha$ und $1+\alpha, \alpha^{-1}$, von konstantem Vorzeichen in den beiden benachbarten Intervallen $1-\alpha, 1$ und $1, 1+\alpha$, dem Betrage nach zunehmend in $1-\alpha, 1$ und abnehmend in $1, 1+\alpha$. Es soll r nur solche positive Werte durchlaufen, die sich außerhalb der offenen Intervalle $\varrho_m - l$, $\varrho_m + l$ befinden.*

In beiden Fällen ist

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty}{}' f\left(\frac{\varrho_m}{r}\right)\frac{1}{r} = A\cdot\int_0^\infty f(x)\,dx. \tag{43}$$

Der Fall 2 bietet nur dann ein Interesse, wenn $f(x)$ im Intervalle $1-\alpha, 1+\alpha$ nicht beschränkt und im Punkte $x=1$ nicht definiert ist (die Annahme des Wertes ∞ durch $f(x)$ wird eben nicht zugelassen). Das Intervall $0, \alpha$ ist mit Rücksicht auf die Möglichkeit ausgezeichnet worden, daß $f(x)\to\infty$ für $x\to 0$.

Der Beweis des Satzes XI wird etappenweise, und zwar zuerst für einfache spezielle Funktionen $f(x)$ geführt.

a) Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq a, \\ 0 & \text{für} \quad x > a. \end{cases}$$

In diesem Falle ist

$$\frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty}{}' f\left(\frac{\varrho_m}{r}\right) = \frac{N(ar)}{r} \to a\,A = A\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

b) Wenn Satz XI für die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ richtig ist, so ist er auch für die Funktion $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ Konstanten) offenbar richtig. Durch lineare Kombination von Funktionen der unter a) erwähnten Art stellt sich Satz XI als richtig für *Treppenfunktionen* heraus, das heißt für stückweise konstante Funktionen mit endlich vielen Sprungstellen, die überall von links stetig sind und für genügend großes x verschwinden.

c) Satz XI ist richtig, wenn $f(x)$ im Intervalle $0, A$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel ist und im Intervall A, ∞ verschwindet. Denn bei gegebenem ε, $\varepsilon > 0$, lassen sich zwei Treppenfunktionen $T_1(x)$ und

$T_2(x)$ angeben, so daß

$$T_1(x) < f(x) < T_2(x), \qquad \int_0^\infty T_2(x)\,dx - \varepsilon < \int_0^\infty f(x)\,dx < \int_0^\infty T_1(x)\,dx + \varepsilon$$

und für $T_1(x)$, $T_2(x)$ wurde der Satz unter b) bewiesen.

d) Es sei jetzt $f(x)$ nur den im Satz XI ausgesprochenen Bedingungen unterworfen und $0 < \delta < \alpha$. Ich behaupte, daß die Beträge der vier Summen, die aus

$$\sum f\left(\frac{\varrho_m}{r}\right)\frac{1}{r}$$

dadurch entstehen, daß ϱ_m auf eines der vier Intervalle

$$(44) \quad 0 < \varrho_m \leqq r\,\delta, \quad r(1-\delta) \leqq \varrho_m < r, \quad r < \varrho_m \leqq r(1+\delta), \quad \varrho_m > r\,\delta^{-1}$$

eingeschränkt wird, für $r \to \infty$ einen Limes superior besitzen, der für $\delta \to 0$ gegen 0 strebt. (Die beiden mittleren Summen sind nur im Falle 2 zu betrachten.)

Es wird genügen die Behauptung nur für die vierte Summe nachzuweisen (es wird beiläufig auch deren Konvergenz gezeigt). Es kann $f(x) > 0$ für $x > \alpha^{-1}$ angenommen werden.

Es sei $\varrho_{\mu-1} < \delta^{-1} r \leqq \varrho_\mu$; dann ist

$$\varrho_{\mu+n} \geqq \varrho_\mu + n\,l \geqq \delta^{-1} r + n\,l, \qquad \frac{\varrho_{\mu+n}}{r} \geqq \frac{1}{\delta} + \frac{n\,l}{r},$$

also, da $f(x)$ abnehmend,

$$\sum_{\varrho_m \geqq \delta^{-1} r} f\left(\frac{\varrho_m}{r}\right)\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{\varrho_{\mu+n}}{r}\right)\frac{1}{r} \leqq \frac{1}{r} f\left(\frac{1}{\delta}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{\delta} + \frac{n\,l}{r}\right)\frac{1}{r}$$

$$\leqq \frac{1}{r} f\left(\frac{1}{\delta}\right) + \frac{1}{l}\int_{\delta^{-1}}^{\infty} f(x)\,dx \to \frac{1}{l}\int_{\delta^{-1}}^{\infty} f(x)\,dx$$

für $r \to \infty$, und der letzterhaltene Wert strebt gegen 0 für $\delta \to 0$. (Bei Abschätzung der übrigen drei Summen erhält man drei analoge Integrale; bei den beiden mittleren Summen kommt die Bedingung $|r - \varrho_m| \geqq l$ wesentlich in Betracht.)

e) Endlich teile man das Intervall $x > 0$ durch die fünf Teilpunkte $r\,\delta$, $r(1-\delta)$, r, $r(1+\delta)$, $r\,\delta^{-1}$ in sechs Teilintervalle und dementsprechend die ϱ_m in sechs Kategorien und die Summe unter dem Limeszeichen in (43) in sechs Teilsummen. Die zweite und fünfte streben gemäß c) bzw. gegen

$$A\int_{\delta}^{1-\delta} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad A\int_{1+\delta}^{\delta^{-1}} f(x)\,dx,$$

die vier anderen bleiben gemäß d) zwischen Unbestimmtheitsgrenzen, die mit δ unendlich klein werden.

14. Jetzt soll Satz XI auf die ganze Funktion

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\varrho_m^2}\right) \tag{45}$$

angewendet werden; die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ sollen den daselbst ausgesprochenen Bedingungen genügen.

Beispiel 1. Auf die Funktion $f(x) = \log|1 - x^{-2} e^{2i\varphi}|$, φ reell, $\varphi \not\equiv 0, \pi \pmod{2\pi}$ ist der Fall 1 des Satzes XI anzuwenden. Es ist bekanntlich

$$\int_0^x \log|1 - x^{-2} e^{2i\varphi}|\, dx = \pi |\sin\varphi| \tag{46}$$

und folglich für stetig wachsendes positives r

$$\lim_{r \to \infty} r^{-1} \log|F(r e^{i\varphi})| = \lim_{r \to \infty} \sum_{m=1}^{\nu} \frac{1}{r} \log|1 - \frac{r^2}{\varrho_m^2} e^{2i\varphi}| = 4\pi |\sin\varphi|. \tag{47}$$

Beispiel 2. Auf die Funktion $f(x) = \log|1 - x^{-2}|$ ist der erste Fall des Satzes XI nicht anwendbar, nur der zweite. Da (46) auch für $\varphi = 0$ gültig bleibt, ist, wenn das positive r so ins Unendliche wächst, daß die Bedingung $|r - \varrho_m| \geqq l > 0$ gewahrt wird,

$$\lim r^{-1} \log|F(r)| = \lim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{r} \log\left|1 - \frac{r^2}{\varrho_m^2}\right| = 0. \tag{48}$$

Für stetig wachsendes r ist (48) offenbar falsch. Sind die ϱ_m mit den λ_n auf die in Satz IX angegebene Art verbunden, so bleibt (48) insbesondere dann richtig, wenn r die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ durchlaufend gegen ∞ strebt.

Zweites Kapitel.

Geometrische Darstellung der Wachstumsverhältnisse der ganzen Funktionen vom Normaltypus der Ordnung Eins.

Zusammenstellung von Definitionen und Sätzen über konvexe Bereiche[20].

15. Die im folgenden zu betrachtenden Punktmengen liegen in der Ebene der komplexen Zahlen. Ein variabler Punkt dieser Ebene wird meistens mit $z = x + iy$ bezeichnet (x, y reell, $\Re z = x$, $\Im z = y$, $\bar{z} = x - iy$).

[20]) Vgl. insbesondere H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen (Leipzig und Berlin) 2 (1911), S. 131—229, ferner C. Carathéodory, Rendiconti del Circolo Mat. Palermo 32 (1911), p. 195—201, und W. Blaschke, Kreis und Kugel (Leipzig 1916), passim. Auf diese Werke sei im allgemeinen zur Ergänzung verwiesen, da es sich hier, neben Einführung der Bezeichnungen, mehr um die nähere Ausführung von nur solchen Sätzen handelt, denen in den anschließenden funktionentheoretischen Schlüssen eine größere Rolle zufällt.

Punktmengen sollen mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet werden, wie $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$. Es wird (nur in einigen einfachen Fällen) folgende Bezeichnung benutzt: Wenn z die Punktmenge $\mathfrak{A}$ durchläuft, durchläuft der Punkt $f(z)$ eine Punktmenge, die $f(\mathfrak{A})$ genannt werden soll. Beispiele: $a + \mathfrak{A}$, $-\mathfrak{A}$, $\bar{\mathfrak{A}}$ entstehen aus $\mathfrak{A}$ durch Parallelverschiebung um den Vektor a, durch Symmetrie in bezug auf den Nullpunkt, bzw. durch Spiegelung an der reellen Achse.

Allgemeiner, wenn $z_1, z_2, \ldots, z_n$ voneinander unabhängig die Punktmengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ durchlaufen, durchläuft der Punkt $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine Punktmenge, die $f(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ heißen soll.

Das wichtigste Beispiel ist die Summenbildung. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ kann entweder als die Vereinigungsmenge der Mengen $a + \mathfrak{B}$ oder als die der Mengen $\mathfrak{A} + b$ aufgefaßt werden, wo a alle Punkte von $\mathfrak{A}$, b alle von $\mathfrak{B}$ durchläuft.

Sind beide Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschränkt und abgeschlossen, so ist auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ beschränkt und abgeschlossen. Denn gehören die Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zu $\mathfrak{A}$, $b_1, b_2, b_3, \ldots$ zu $\mathfrak{B}$, und ist $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = c$, so gewinnt man durch geeignete Auswahl die Teilfolgen $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots$, so daß

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a, \qquad \lim_{k \to \infty} b_{n_k} = b$$

ist, also a zu $\mathfrak{A}$, b zu $\mathfrak{B}$ gehört, und $a + b = c$. Es gilt auch: *Wenn $\mathfrak{A}$ beschränkt und abgeschlossen, und $\mathfrak{B}$ unbeschränkt und nur im Endlichen abgeschlossen ist, d. h. ihre im Endlichen liegenden Häufungspunkte enthält, so ist auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ im Endlichen abgeschlossen.* Wenn aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide unbeschränkt sind, versagt der Schluß völlig.

Wenn $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ keinen Punkt mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam hat, so hat $\mathfrak{A}$ keinen Punkt mit $\mathfrak{C} - \mathfrak{B}$ gemeinsam. Denn sind a, b, c komplexe Zahlen, die bzw. zu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gehören, so sind die beiden Ungleichungen

$$a + b \neq c \quad \text{und} \quad a \neq c - b$$

gleichbedeutend.

16. Unter einem konvexen Bereich versteht man eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge, die mit irgend zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke mitenthält.

Sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ konvexe Bereiche, so ist ihr *Summenbereich* $\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$ auch konvex. Denn gehören z_1, z_1' zu $\mathfrak{K}_1$, z_2, z_2' zu $\mathfrak{K}_2$, so hat irgendein Punkt auf der Verbindungsstrecke von $z_1 + z_2$ und $z_1' + z_2'$ die Form

$$(1) \quad t(z_1 + z_2) + (1 - t)(z_1' + z_2') = (tz_1 + (1 - t)z_1') + (tz_2 + (1 - t)z_2'),$$

$0 \leqq t \leqq 1$, und $tz_1 + (1 - t)z_1'$ gehört zu $\mathfrak{K}_1$, $tz_2 + (1 - t)z_2'$ zu $\mathfrak{K}_2$, also der Punkt (1) zu $\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$. Z. B. ist, wenn $\mathfrak{E}$ den Einheitskreis $|z| \leqq 1$

und ε eine positive Zahl bezeichnet, $\mathfrak{R} + \varepsilon\mathfrak{E}$, der *Parallelbereich von* $\mathfrak{R}$ *im Abstand* ε, zugleich mit $\mathfrak{R}$ konvex.

Der Durchschnitt (größter gemeinsamer Teil) von konvexen Bereichen (in endlicher oder unendlicher Anzahl) ist wieder ein konvexer Bereich.

Der Durchschnitt aller konvexer Bereiche, die eine beschränkte Punktmenge $\mathfrak{A}$ enthalten, heißt die *kleinste konvexe Hülle* von $\mathfrak{A}$.

17. Es sei gegeben der konvexe Bereich $\mathfrak{R}$. Wenn der Punkt $z = x + iy$ den Bereich $\mathfrak{R}$ durchläuft, erreicht bei festem, reellem φ der Ausdruck

$$\Re z e^{-i\varphi} = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

ein bestimmtes Maximum, das mit $h(\varphi)$ bezeichnet werden soll. Die Gerade

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - h(\varphi) = 0 \tag{2}$$

soll die *Stützgerade von Normalenrichtung* φ des konvexen Bereiches $\mathfrak{R}$ heißen.

Es folgt unmittelbar aus der Definition, daß *für jeden festen Punkt* $x + iy$ *von* $\mathfrak{R}$ *die Ungleichung*

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - h(\varphi) \leqq 0 \tag{3}$$

für alle Werte von φ *erfüllt ist*, und daß *für jeden festen Wert von* φ *mindestens ein Punkt* $x + iy$ *von* $\mathfrak{R}$ *existiert, für den in* (3) *das Gleichheitszeichen gilt.* Man kann noch zeigen, daß *nur Punkte von* $\mathfrak{R}$ *für alle Werte von* φ *die Ungleichung* (3) *erfüllen.* M. a. W. liegen die Punkte von $\mathfrak{R}$, und nur diese an der negativen Seite sämtlicher Stützgeraden und jede Stützgerade geht durch einen Punkt von $\mathfrak{R}$. (Als negative Seite der Stützgeraden (2) wird die abgeschlossene Halbebene bezeichnet, in der die linke Seite von (2) nicht positiv ausfällt.)

$\mathfrak{R}$ ist also durch die Funktion $h(\varphi)$ vollständig bestimmt. $h(\varphi)$ heißt die *Stützfunktion* von $\mathfrak{R}$. Die Stützfunktionen bilden eine eigene Klasse von reellen Funktionen, die durch die Periodizität und durch eine „Funktionalungleichung" charakterisiert werden kann, wie der folgende Satz zeigt[21]):

Die reellwertige Funktion $h(\varphi)$ *sei für sämtliche reellen Werte der Variablen* φ *definiert. Sie ist dann und nur dann die Stützfunktion eines konvexen Bereiches, wenn sie erstens periodisch mit der Periode* 2π *ist, und zweitens für alle reellen Wertetripel* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, *die der Bedingung*

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \pi, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \pi \tag{4}$$

[21]) Vgl. W. Blaschke, Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. 23 (1914), S. 210—234, insbesondere S. 222, ferner H. Rademacher, Math. Zeitschr. 13 (1922), S. 18—27.

genügen, die Ungleichung

$$(5)\quad h(\varphi_1)\sin(\varphi_3-\varphi_2)+h(\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_3)+h(\varphi_3)\sin(\varphi_2-\varphi_1)\geqq 0$$

erfüllt.

a) Es sei $\mathfrak{K}$ ein konvexer Bereich und $h(\varphi)$ seine Stützfunktion. Dann ist $h(\varphi)$ für alle reellen Werte φ definiert und eine Funktion der „Richtung", d. h. es ist $h(\varphi+2\pi)=h(\varphi)$. Es sollen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ der Bedingung (4) genügen; für alle Punkte $x+iy$ von $\mathfrak{K}$ gilt

$$x\cos\varphi_1+y\sin\varphi_1-h(\varphi_1)\leqq 0,$$
$$x\cos\varphi_3+y\sin\varphi_3-h(\varphi_3)\leqq 0.$$

Durch Multiplikation dieser Ungleichungen mit den positiven Zahlen $\sin(\varphi_3-\varphi_2)$ bzw. $\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ und Addition erhält man, daß für alle Punkte $x+iy$ von $\mathfrak{K}$ auch

$$-\{x\cos\varphi_2+y\sin\varphi_2\}\sin(\varphi_1-\varphi_3)$$
$$-h(\varphi_1)\sin(\varphi_3-\varphi_2)-h(\varphi_3)\sin(\varphi_2-\varphi_1)\leqq 0$$

gilt. Für einen geeigneten Punkt $x+iy$ von $\mathfrak{K}$ ist aber der Wert der geschweiften Klammer $=h(\varphi_2)$, und so folgt die Ungleichung (5).

b) Es sei jetzt, im Gegensatz zu a), vorausgesetzt, daß die Ungleichung (5) unter der Bedingung (4) erfüllt und daß $h(\varphi)$ periodisch mit der Periode 2π ist. Dann ist, wie zunächst gezeigt werden soll, $h(\varphi)$ *stetig und besitzt in jedem Punkte einen Differentialquotienten von rechts.*

Es soll zunächst ein Punkt α betrachtet werden, in dem

$$(6)\qquad h(\alpha)<0$$

gilt. Es sei

$$(7)\qquad \varepsilon>0,\quad \delta>0,\quad \varepsilon+\delta<\pi.$$

Indem man $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in (5) durch

$$\alpha-\varepsilon-\delta,\ \alpha-\varepsilon,\ \alpha \text{ bzw. } \alpha-\varepsilon,\ \alpha,\ \alpha+\varepsilon \text{ bzw. } \alpha,\ \alpha+\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon+\delta$$

ersetzt, erhält man

$$(8)\quad \frac{h(\alpha)-h(\alpha-\varepsilon-\delta)}{\sin(\varepsilon+\delta)}<\frac{h(\alpha)-h(\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon}<\frac{h(\alpha+\varepsilon)-h(\alpha)}{\sin\varepsilon}<\frac{h(\alpha+\varepsilon+\delta)-h(\alpha)}{\sin(\varepsilon+\delta)}.$$

Für das erstbetrachtete Werttripel ergibt nämlich (5)

$$h(\alpha-\varepsilon-\delta)\sin\varepsilon-h(\alpha-\varepsilon)\sin(\varepsilon+\delta)\geqq -h(\alpha)\sin\delta,$$

woraus weiter

$$(h(\alpha-\varepsilon-\delta)-h(\alpha))\sin\varepsilon-(h(\alpha-\varepsilon)-h(\alpha))\sin(\varepsilon+\delta)$$
$$\geqq h(\alpha)(\sin(\varepsilon+\delta)-\sin\varepsilon-\sin\delta)$$
$$=-h(\alpha)\,2\sin\frac{\varepsilon+\delta}{2}\left(\cos\frac{\varepsilon-\delta}{2}-\cos\frac{\varepsilon+\delta}{2}\right)>0$$

folgt, unter Beachtung von (6) und (7), d. h.

$$(h(\alpha-\varepsilon-\delta)-h(\alpha))\sin\varepsilon > (h(\alpha-\varepsilon)-h(\alpha))\sin(\varepsilon+\delta),$$

was mit der ersten Ungleichung unter (8) gleichbedeutend ist.

Nun bedeutet (8), daß die (für $x=0$ nicht definierte) Funktion $\frac{h(\alpha+x)-h(\alpha)}{\sin x}$ in einer gewissen Umgebung des Punktes $x=0$ stets zunehmend ist; daher strebt sie einem Grenzwert zu, sowohl dann, wenn x von rechts, wie auch dann, wenn x von links in den Nullpunkt hineinrückt; der Grenzwert ist der Differentialquotient von $h(\varphi)$ im Punkte α von rechts bzw. der von links. (Es ergibt sich nebenbei, daß der Differentialquotient von rechts nicht kleiner ist, als der von links.)

Nun wollen wir uns von der Beschränkung (6) befreien. Da für beliebiges $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \alpha$

$$\cos(\varphi_1-\alpha)\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\cos(\varphi_2-\alpha)\sin(\varphi_1-\varphi_3)+\cos(\varphi_3-\alpha)\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$
$$= \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\varphi_1+\sin\alpha\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \cos\alpha\cos\varphi_2+\sin\alpha\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ \cos\alpha\cos\varphi_3+\sin\alpha\sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, bleibt die Ungleichung (5) gültig, wenn darin $h(\varphi)$ durch

$$h(\varphi)-A\cos(\varphi-\alpha) \tag{9}$$

ersetzt wird, A als konstant vorausgesetzt. Bei passender Wahl von A ist die Funktion (9) für $\varphi=\alpha$ negativ, also besitzt sie für $\varphi=\alpha$ einen Differentialquotienten von rechts (und einen von links), woraus dasselbe für $h(\varphi)$ selbst folgt, w. z. b. w.

c) Indem man $0<\varepsilon<\pi$ voraussetzt und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in (5) durch

$$\varphi, \alpha, \alpha+\varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \alpha, \alpha+\varepsilon, \varphi$$

ersetzt, erhält man

$$h(\alpha)\sin(\varphi-\alpha-\varepsilon)+h(\alpha+\varepsilon)\sin(\alpha-\varphi)+h(\varphi)\sin\varepsilon \geqq 0 \tag{10}$$

sowohl für $\alpha-\pi<\varphi<\alpha$ wie für $\alpha+\varepsilon<\varphi<\alpha+\varepsilon+\pi$. An Stelle von (10) können wir auch

$$h(\alpha)\frac{\sin(\varphi-\alpha)-\sin(\varphi-\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon}+\frac{h(\alpha+\varepsilon)-h(\alpha)}{\sin\varepsilon}\sin(\varphi-\alpha)-h(\varphi)\leqq 0 \tag{11}$$

schreiben. Indem man ε in (11) gegen 0 streben läßt und den *rechtsseitigen* Differentialquotienten von $h(\varphi)$ mit $h'(\varphi)$ bezeichnet, erhält man

$$h(\alpha)\cos(\varphi-\alpha)+h'(\alpha)\sin(\varphi-\alpha)-h(\varphi)\leqq 0 \tag{12}$$

für $\alpha-\pi<\varphi\leqq\alpha+\pi$, also, wegen der Periodizität von $h(\varphi)$, für sämtliche Werte von φ.

d) Es sei, wie unter b), $h(\varphi)$ als periodisch und (5) als erfüllt vorausgesetzt. Es sei eine Punktmenge $\mathfrak{K}$ folgendermaßen definiert: Der Punkt $x+iy$ gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{K}$, wenn für sämtliche reellen Werte von φ

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - h(\varphi) \leqq 0 \tag{13}$$

ist.

$\mathfrak{K}$ ist beschränkt: Indem wir in (13) (etwa) $\varphi = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ setzen, erhalten wir ein gleichseitiges Dreieck, das $\mathfrak{K}$ enthält.

$\mathfrak{K}$ ist konvex: Aus dem Bestehen der Ungleichung (13) für $x+iy = x_1+iy_1$ und für $x+iy = x_2+iy_2$ folgt durch lineare Kombination ihr Bestehen für $x+iy = tx_1+(1-t)x_2 + i(ty_1+(1-t)y_2)$, falls $0<t<1$ ist.

$\mathfrak{K}$ ist abgeschlossen: Aus dem Bestehen der Ungleichung (13) für eine Folge $x_1+iy_1, x_2+iy_2, x_3+iy_3, \ldots$ von Punkten, die einem Grenzpunkt zustreben, folgt ihr Bestehen für den Grenzpunkt.

Es soll nun gezeigt werden — erst hier wird die wesentliche Voraussetzung (5) benützt —, daß $\mathfrak{K}$ mindestens einen Punkt enthält, und genauer, daß zu jedem reellen Wert α ein Punkt $x_\alpha+iy_\alpha$ von $\mathfrak{K}$ gehört, so daß

$$x_\alpha\cos\alpha + y_\alpha\sin\alpha - h(\alpha) = 0 \tag{14}$$

ist.

Der übliche Ansatz für die Berechnung von Hüllkurven führt uns dazu, $x_\alpha+iy_\alpha$ durch (14) und

$$-x_\alpha\sin\alpha + y_\alpha\cos\alpha - h'(\alpha) = 0 \tag{15}$$

zu bestimmen, wo $h'(\alpha)$ (Bestimmtheit halber) die *rechtsseitige* Derivierte bezeichnet. Wir können x_α, y_α dem System (14), (15) entnehmen; daß für $x+iy = x_\alpha+iy_\alpha$ die Ungleichung (13) bei jedem reellen Wert von φ erfüllt ist, kommt auf die unter c) bewiesene Ungleichung (12) hinaus.

Da für jeden Punkt $x+iy$ von $\mathfrak{K}$ nach Definition

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha \leqq h(\alpha)$$

gilt, zeigt (14), daß $h(\alpha)$ das Maximum von $x\cos\alpha + y\sin\alpha$ ist, wenn der Punkt $x+iy$ den Bereich $\mathfrak{K}$ durchläuft; $h(\varphi)$ ist die Stützfunktion des konvexen Bereiches $\mathfrak{K}$, w. z. b. w.

18. Die Stützfunktion des Kreises $|z| \leqq \varepsilon$ ist $h(\varphi) = \varepsilon$. Die Stützfunktion der Verbindungsstrecke der Punkte i und $-i$ ist $h(\varphi) = |\sin\varphi|$. Die Stützfunktion des Punktes $a = |a|e^{i\alpha}$ ist $h(\varphi) = |a|\cos(\varphi-\alpha)$.

Es seien $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, …, $\mathfrak{K}_n$ konvexe Bereiche, $h(\varphi)$ bzw. $h_1(\varphi)$, $h_2(\varphi)$, …, $h_n(\varphi)$ ihre Stützfunktionen.

Wenn $\mathfrak{K}_1$ ein Teilbereich von $\mathfrak{K}$ ist, so ist $h_1(\varphi) \leqq h(\varphi)$. Denn Max $(x \cos\varphi + y \sin\varphi)$ kann in dem Teilbereich nicht größer ausfallen, als in dem vollen Bereich.

Es sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$. Wenn z_1 und z_2 $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ voneinander *unabhängig* durchlaufen, ist

$$h(\varphi) = \text{Max}\, \Re (z_1 + z_2) e^{-i\varphi} = \text{Max}\, \Re z_1 e^{-i\varphi} + \text{Max}\, \Re z_2 e^{-i\varphi}$$
$$= h_1(\varphi) \qquad + h_2(\varphi).$$

Z. B. ist die Stützfunktion des Parallelbereiches von $\mathfrak{K}$ im Abstand ε (vgl. unter 16) $= h(\varphi) + \varepsilon$.

Wenn $\mathfrak{K}$ der kleinste konvexe Bereich ist, der $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ alle zugleich enthält, so ist

$$h(\varphi) = \text{Max}\, (h_1(\varphi), h_2(\varphi), \ldots, h_n(\varphi)).$$

Da $h_1(\varphi), h_2(\varphi), \ldots, h_n(\varphi)$ als Maxima definiert sind, erscheint hier $h(\varphi)$ als ein „maximum maximorum". Dies ist leicht der Definition zu entnehmen.

19. Die von den beiden Endpunkten verschiedenen Punkte einer geradlinigen Strecke sollen als *inwendige* Punkte der Strecke bezeichnet werden.

Ein im konvexen Bereich $\mathfrak{K}$ gelegener Punkt z soll *extremer Punkt* von $\mathfrak{K}$ genannt werden, wenn z auf keine Weise als inwendiger Punkt einer ganz in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Strecke erscheint. Die Punkte von $\mathfrak{K}$ zerfallen in drei Klassen:

1. Innere Punkte von $\mathfrak{K}$.

2. Inwendige Punkte geradliniger Strecken, die ganz zum Rand von $\mathfrak{K}$ gehören.

3. Extreme Punkte von $\mathfrak{K}$.

In einem konvexen Polygon sind alle drei Klassen von Punkten vorhanden; die Eckpunkte des Polygons bilden die Klasse 3, die inwendigen Punkte der Seiten die Klasse 2. An einem Kreis fehlt die Klasse 2, an einer geradlinigen Strecke die Klasse 1, und wenn $\mathfrak{K}$ sich auf einen einzigen Punkt reduziert, fehlen die Klassen 1 und 2.

Jede Stützgerade von $\mathfrak{K}$ hat mit $\mathfrak{K}$ entweder einen Punkt oder eine Strecke gemeinsam und enthält folglich entweder einen extremen Punkt oder zwei extreme Punkte von $\mathfrak{K}$. Daher *besitzt jeder konvexe Bereich extreme Punkte.* Gebraucht wird im folgenden hauptsächlich der folgende

Hilfssatz 1. *Ein extremer Punkt ζ des konvexen Bereiches $\mathfrak{K}$ besitzt die Eigenschaft, daß nach Ausscheiden einer beliebig kleinen Umgebung von ζ aus $\mathfrak{K}$ eine Punktmenge übrig bleibt, die in einem konvexen echten Teil von $\mathfrak{K}$ enthalten ist.*

Zum Beweis brauchen wir die Tatsache, daß *durch jeden Randpunkt von $\mathfrak{K}$ mindestens eine Stützgerade von $\mathfrak{K}$ geht*[22]). Der extreme Punkt ζ ist entweder der einzige Punkt von $\mathfrak{K}$, der auf der durch ζ gehenden Stützgeraden liegt, oder der eine Endpunkt der Strecke, die die genannte Stützgerade mit $\mathfrak{K}$ gemeinsam hat. In beiden Fällen ist ersichtlich, daß eine Kreislinie $\mathfrak{L}$ vom Mittelpunkt ζ einen von Punkten von $\mathfrak{K}$ freien Bogen besitzt, dessen *Öffnung π übersteigt*. Die Verbindungsgerade der beiden Endpunkte des besagten Bogens von $\mathfrak{L}$ teilt die Ebene in zwei Halbebenen, von denen die eine, abgeschlossen gedachte, ζ nicht enthält, und der Durchschnitt dieser Halbebene mit $\mathfrak{K}$ ist ein *konvexer* und *echter* Teil von $\mathfrak{K}$, denn er enthält nicht ζ. Dieser Durchschnitt enthält aber alle Punkte von $\mathfrak{K}$, die nicht in der durch $\mathfrak{L}$ begrenzten Umgebung von ζ liegen, w. z. b. w.

Übrigens besitzen nur extreme Punkte von $\mathfrak{K}$ die im Hilfssatz genannte Eigenschaft.

Der Borelsche Fall der Laplaceschen Transformation.

20. Wenn zu der ganzen Funktion $F(z)$ eine positive Konstante a gehört, derart, daß das Produkt

$$F(z)\,e^{-a|z|} \tag{16}$$

in der ganzen z-Ebene beschränkt bleibt, so sagt man der Übung gemäß, daß das Anwachsen von $F(z)$ *den Normaltypus der Ordnung* 1 *nicht übersteigt*. An Stelle dieses etwas langen Ausdrucks (der später mehr angebracht sein wird), soll in diesem Kapitel durchweg ein kürzerer gebraucht werden: Wenn das Produkt (16) für ein passendes a in der ganzen Ebene beschränkt bleibt, so soll die ganze Funktion $F(z)$ vom *Exponentialtypus* heißen. Die Exponentialfunktion e^z selbst ist wohl die einfachste ganze Funktion vom Exponentialtypus. Ich beweise zunächst[23])

Satz I. *Die Potenzreihe*

$$a_0 + \frac{a_1}{1!}z + \frac{a_2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}z^n + \ldots = F(z) \tag{17}$$

stellt dann und nur dann eine ganze Funktion vom Exponentialtypus dar, wenn die mit denselben Konstanten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ gebildete Potenzreihe

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \ldots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \ldots = f(z) \tag{18}$$

---

[22]) Am einfachsten bei Carathéodory, a. a. O. [20]), S. 198.

[23]) Satz I ist ein hier besonders interessierender Spezialfall wohlbekannter allgemeiner Sätze; vgl. E. Lindelöf, Acta Soc. Scient. Fennicae **31** (1902), Nr. 1, S. 45.

nicht für sämtliche Werte von z divergiert. Wird mit $M(r)$ das Maximum von $|F(z)|$ im Kreise $|z| \leqq r$ und mit H der Konvergenzradius von (18) *bezeichnet (so daß* (18) *für $|z| > H$ konvergiert und für $|z| < H$ divergiert), so ist*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} r^{-1} \log M(r) = H. \tag{19}$$

a) Es sei angenommen, daß die Reihe (18) nicht stets divergiert. Der Konvergenzradius der Reihe (18) ist bekanntlich

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\sqrt[n]{a_n}| = H. \tag{20}$$

Zu gegebenem positiven ε existiert also ein N, so daß für $n > N$

$$|a_n| < (H + \varepsilon)^n,$$

$$|F(z)| < \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|\,|z|^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(H+\varepsilon)^n |z|^n}{n!} \tag{21}$$

$$< \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|\,|z|^n}{n!} + e^{(H+\varepsilon)|z|} < e^{(H+2\varepsilon)|z|}$$

für genügend großes $|z|$. Somit bleibt (16) für $a = H + 2\varepsilon$ sicher beschränkt, also ist $F(z)$ vom Exponentialtypus. Für passendes z, $|z| = r$, ist $|F(z)| = M(r)$. Somit ergibt (21), da ε beliebig nahe an 0 gewählt werden kann,

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} r^{-1} \log M(r) \leqq H. \tag{22}$$

b) Es sei angenommen, daß die Reihe (17) eine ganze Funktion vom Exponentialtypus darstellt.

Offenbar ist die linke Seite von (19) die untere Grenze derjenigen Konstanten a, für welche (16) beschränkt bleibt.

Aus der Ungleichung

$$|F(z)| < A e^{a|z|} \tag{23}$$

folgt bekanntlich für das n-te Glied der Reihe (17)

$$\frac{|a_n| r^n}{n!} < A e^{ar}. \tag{24}$$

Setzen wir $r = n a^{-1}$ in (24). Es folgt

$$\frac{|a_n| n^n}{n!\, a^n} < A e^n$$

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{a e}{n} \sqrt[n]{n!}\, \sqrt[n]{A} \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{25}$$

Betrachtet man das eben über die untere Grenze der in (16) zulässigen Konstanten a Gesagte, so folgt

$$H = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqq \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-1} \log M(r). \tag{26}$$

Satz I ist durch (22) und (26) vollständig bewiesen.

21. Die beiden mit denselben Konstanten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ aufgebauten Funktionen (17) und (18) lassen sich gegenseitig durcheinander ausdrücken.

a) Wenn die Integrationslinie der im positiven Sinne durchlaufene Kreis $|z| = H + \varepsilon > H$ und Z beliebig ist, ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\, e^{zZ}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\oint \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}} \frac{z^l Z^l}{l!}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n Z^n}{n!} = F(Z).$$

Es ist nämlich die unter dem Integralzeichen auftretende Doppelreihe für $|z| = H + \varepsilon$ absolut und gleichmäßig konvergent und gestattet die gliedweise Integration.

b) Wenn die Integrationslinie die positive reelle Achse und z positiv, $z > H$ ist, ergibt sich

$$\int_0^{\infty} F(Z)\, e^{-zZ}\, dZ \quad \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n Z^n}{n!}\, e^{-zZ}\, dZ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{\infty} Z^n e^{-zZ}\, dZ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

Wenn nämlich a_n durch $|a_n|$ ersetzt wird, erhält man lauter positive Reihenglieder und die im Schlußresultat auftretende Reihe bleibt für $z > H$ konvergent.

Zusammengefaßt, erhalten wir unter den besagten Bedingungen die beiden Integralformeln

$$F(Z) = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\, e^{zZ}\, dz, \tag{27}$$

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(Z)\, e^{-zZ}\, dZ. \tag{28}$$

Sie zeigen die dem nahe verwandten Fourierschen Integraltheorem eigentümliche Reziprozität[24]).

[24]) Der Ausdruck des Zusammenhanges der beiden Reihen (17), (18) durch die beiden Integrale (27), (28) findet sich schon bei S. Pincherle, a. a. O. [9a]), vgl. die dortigen Formeln (22) und (23), (26) und (27). Die Reziprozität der beiden Integralformeln findet dort allerdings keine Verwendung, während hier die nachfolgende Untersuchung des funktionentheoretischen Zusammenhanges zwischen $f(z)$ und $F(z)$ eben auf diese Reziprozität gegründet sein wird, wie a. a. O. [2c]) angedeutet wurde. — Man kann übrigens (27), (28) aus der wohlbekannten Mellinschen Umkehrformel, oder die eine Formel aus der anderen ohne expliziten Gebrauch der Reihen (17), (18), nur mit Berücksichtigung der funktionentheoretischen Voraussetzungen herleiten.

Die mit der ganzen Funktion vom Exponentialtypus $F(z)$ durch die beiden Formelpaare (17), (18) und (27), (28) verbundene Funktion $f(z)$, die durch ein im Punkte $z = \infty$ reguläres und verschwindendes Funktionselement definiert ist, sei im folgenden die *Borelsche Transformierte* von $F(z)$ genannt. (In der üblichen Terminologie wäre sowohl $f(z)$ als die Laplacesche Transformierte von $F(z)$ wie auch $2\pi i F(\quad z)$ als die Laplacesche Transformierte von $f(z)$ zu bezeichnen.)

Der Indikator, das Indikatordiagramm und das konjugierte Diagramm.

22. Man kann in beiden Integralformeln (27) und (28) den Integrationsweg abändern. Der kreisförmige Weg von (27) wird um die Singularitäten von $f(z)$ zusammengeschnürt, und der geradlinige Weg von (28) um den Nullpunkt herum rotiert.

a) Es gibt konvexe Bereiche, in deren Außenraum die durch die Reihe (18) definierte analytische Funktion $f(z)$ ausnahmslos regulär ist; z. B. die Kreisfläche $|z| \leqq H$ ist ein solcher Bereich. Der Durchschnitt (größter gemeinsamer Teil) aller dieser Bereiche sei mit $\bar{\mathfrak{J}}$ bezeichnet und das *konjugierte Diagramm* genannt (der Grund dieser Bezeichnung wird später ersichtlich sein). Das konjugierte Diagramm $\mathfrak{J}$ ist, als Durchschnitt konvexer Bereiche, konvex, und $f(z)$ ist im Außenraum von $\mathfrak{J}$ regulär. $\mathfrak{J}$ ist also ein konvexer Bereich von der Eigenschaft, daß sein Komplementärgebiet nur reguläre Punkte von $f(z)$ enthält, und $\mathfrak{J}$ hat *keinen konvexen echten Teilbereich von derselben Eigenschaft.*

Die eben definierte Punktmenge $\mathfrak{J}$ ist dann und nur dann leer, wenn $f(z)$ keine Singularitäten im Endlichen besitzt. In diesem Falle muß $f(z)$, die im Punkte $z \quad \infty$ regulär und $\quad 0$ ist, identisch verschwinden, und auch $F(z)$ muß identisch $= 0$ sein. — Für $F(z) = e^z$ ist $f(z) = (z-1)^{-1}$ und $\bar{\mathfrak{J}}$ besteht aus dem einzigen Punkt $z = 1$.

Die Formel (27) wurde für die Integrationslinie $|z| - H + \varepsilon$ bewiesen, die das konjugierte Diagramm $\mathfrak{J}$ einschließt. Wir können aber die Integrationslinie von (27) im Außenraum von $\mathfrak{J}$ deformieren, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Wir können z. B. als Integrationslinie die im positiven Sinne durchlaufene Begrenzung eines Parallelbereiches von $\bar{\mathfrak{J}}$ nehmen.

b) Setzen wir

$$z = x + iy = re^{i\varphi}, \qquad Z = Re^{i\Phi} \tag{29}$$

($x, y, r, \varphi, R, \Phi$ reell, r, R nichtnegativ). Betrachten wir das Integral

$$\int_0^{\infty(\Phi)} F(Z)\, e^{-zZ}\, dZ, \tag{30}$$

das entlang des Halbstrahls von Richtung Φ erstreckt ist, das heißt entlang desjenigen vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahls, der mit der positiven reellen Achse den Winkel Φ bildet. Die Beschaffenheit der Integrationslinie ist in der Bezeichnung der oberen Grenze des Integrals (30) zum Ausdruck gebracht (diese Bezeichnung wird im folgenden beibehalten). Es ist, nach Satz I:

$$(31) \qquad \begin{aligned} |F(Z)e^{-zZ}| &= |F(Z)|\,e^{-Rr\cos(\Phi+\varphi)} \\ &< e^{R(H+\varepsilon)-Rr\cos(\Phi+\varphi)} = e^{-R(r\cos(\Phi+\varphi)-H-\varepsilon)} \end{aligned}$$

bei jedem festen $\varepsilon > 0$ für genügend großes R. Hieraus folgt, daß das Integral (30) für solche Werte von $z = re^{i\varphi}$ sicher konvergiert, für welche

$$(32) \qquad x\cos\Phi - y\sin\Phi = r\cos(\varphi+\Phi) > H$$

ist. Die der Ungleichung (32) genügenden Werte von z liegen in einer Halbebene, deren Begrenzungsgerade auf der Richtung $-\Phi$ senkrecht steht. In dieser Halbebene stellt (30) eine analytische Funktion dar.

Wir wollen jetzt zwei Integrale von der Form (30), die entlang zweier verschiedener Halbstrahlen erstreckt sind, miteinander vergleichen. Es seien Φ_1, Φ_2 zwei feste Winkel,

$$(33) \qquad 0 < \Phi_2 - \Phi_1 < \pi,$$

$$(34) \qquad \varphi = -\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2),$$

$$(35) \qquad r\cos\frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1) > H.$$

Es sei $\varrho > 0$ und

$$\varrho e^{i\Phi_1} = Z_1, \quad \varrho e^{i\Phi_2} = Z_2$$

gesetzt. Nach dem Cauchyschen Satze ist

$$(36) \qquad \int_0^{Z_2} F(Z)e^{-zZ}\,dZ - \int_0^{Z_1} F(Z)e^{-zZ}\,dZ = \int_{Z_1}^{Z_2} F(Z)e^{-zZ}\,dZ.$$

Die beiden Integrale links sind geradlinig, dasjenige rechts entlang eines Kreisbogens von Öffnung $\Phi_2 - \Phi_1$ und Radius ϱ erstreckt. Auf diesem Kreisbogen ist also der Arcus von Z der Ungleichung

$$(37) \qquad \Phi_1 \leqq \Phi \leqq \Phi_2$$

unterworfen, und daher ist, vgl. (31), (34), (37), für genügend großes ϱ der Betrag des Integranden

$$< e^{-\varrho[r\cos(\Phi-\frac{1}{2}(\Phi_1+\Phi_2))-H-\varepsilon]} \leqq e^{-\varrho[r\cos\frac{1}{2}(\Phi_2-\Phi_1)-H-\varepsilon]}.$$

Der Koeffizient von ϱ im Exponenten ist, gemäß (35), für genügend kleines ε positiv; also strebt die rechte Seite von (36) für $\varrho \to \infty$ gegen 0.

Das Resultat ist: Die beiden Integrale

$$(38_1) \qquad \int_0^{\infty\,(\Phi_1)} F(Z)\, e^{-zZ}\, dZ,$$

$$(38_2) \qquad \int_0^{\infty\,(\Phi_2)} F(Z)\, e^{-zZ}\, dZ$$

stimmen überein für die durch (34), (35) abgegrenzten Werte von $z = re^{i\varphi}$. Diese Werte erfüllen einen Halbstrahl der z-Ebene, der sowohl in der Halbebene liegt, worin (38_1), wie auch in der, worin (38_2) als konvergent nachgewiesen wurde, vgl. das von (30) Gesagte. Die beiden Integrale (38_1), (38_2) stellen also, jedes in seiner Halbebene, die analytische Fortsetzung einer und derselben Funktion von z dar, und zwar, wie man dem Fall $\Phi_1 = 0$ und Formel (28) entnimmt, die Fortsetzung von $f(z)$.

Wir wollen uns das Schlußergebnis in folgender Form merken: Es gilt, $z = x + iy$ gesetzt,

$$(39) \qquad f(z) = \int_0^{\infty\,(-\Phi)} F(Z)\, e^{-zZ}\, dZ \quad \text{für} \quad x\cos\Phi + y\sin\Phi > H.$$

23. a) Ich behaupte, daß *jeder extreme Punkt des konjugierten Diagramms $\overline{\mathfrak{F}}$ ein singulärer Punkt der Funktion $f(z)$ ist.*

Des genaueren behaupte ich, daß es unmöglich ist $f(z)$ bis in den extremen Punkt ζ von $\overline{\mathfrak{F}}$ hinein analytisch fortzusetzen entlang eines Halbstrahles, der ∞ mit ζ, stets außerhalb $\overline{\mathfrak{F}}$ verlaufend, verbindet. Wäre die Behauptung unrichtig, so wäre $f(z)$ in einer gewissen Umgebung von ζ regulär. Die Punktmenge, die von $\mathfrak{F}$ nach Ausschneiden dieser Umgebung übrigbleibt, wäre nach Hilfssatz 1 (Nr. 19) in einem konvexen *echten* Teil von $\overline{\mathfrak{F}}$, sagen wir $\mathfrak{H}$, enthalten. Außerhalb $\mathfrak{H}$ wäre $f(z)$ regulär, und folglich sollte $\mathfrak{F}$, gemäß der Definition unter 22a), in $\mathfrak{H}$ enthalten sein. Dies ist ein Widerspruch, und aus diesem Widerspruch geht die Richtigkeit der Behauptung hervor.

Die Stützfunktion des konvexen Bereiches $\overline{\mathfrak{F}}$ soll mit $k(\varphi)$ bezeichnet werden. ($k(\varphi)$ ist nicht definiert, wenn $f(z)$ identisch verschwindet.) Weil $\overline{\mathfrak{F}}$ im Kreis $|z| \leqq H$ enthalten ist, ist $k(\varphi) \leqq H$.

b) Es sei

$$(40) \qquad \overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \log |F(re^{i\varphi})| = h(\varphi)$$

gesetzt. Aus Satz I geht hervor, daß $h(\varphi) \leqq H$ ist. (Ob nicht etwa $h(\varphi) = -\infty$ ausfallen kann, wissen wir vorderhand nicht; $h(\varphi)$ ist $= -\infty$ zu setzen, wenn $F(z)$ identisch verschwindet.) Die Funktion $h(\varphi)$ mißt das Anwachsen von $F(z)$ entlang des Halbstrahls von Richtung φ und soll im folgenden als der *Indikator* von $F(z)$ bezeichnet werden.

24. Die Funktion $k(\varphi)$ wurde von den Singularitäten von $f(z)$ aus, die Funktion $h(\varphi)$ von dem Anwachsen von $F(z)$ aus definiert. Es soll jetzt der Zusammenhang zwischen $k(\varphi)$ und $h(\varphi)$ ermittelt werden.

a) Das Integral (27) sei, und zwar in positivem Sinne, entlang der Begrenzung eines Parallelbereiches von $\mathfrak{F}$ erstreckt, vgl. unter 22a). Ist dieser der Parallelbereich im Abstand ε, so ist seine Stützfunktion $k(\varphi)+\varepsilon$, vgl. unter Nr. 18, also gilt für jeden in ihm liegenden Punkt $z = x - iy$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (k(\varphi)+\varepsilon) \leqq 0\,. \tag{41}$$

Wird der Umfang des Parallelbereiches mit L und das Maximum von $|f(z)|$ entlang des Umfangs mit M bezeichnet, so ergibt (27)

$$|F(Re^{-i\Phi})| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\exp(zRe^{-i\Phi})\,dz\right| \tag{42}$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\oint |f(z)|\,e^{R(x\cos\Phi+y\sin\Phi)}\,|dz| \leqq \frac{LM}{2\pi}e^{R(k(\Phi)+\varepsilon)}$$

gemäß (41). Es folgt hieraus, gemäß der Definition von $h(\varphi)$, vgl. (40),

$$h(-\Phi) \leqq k(\Phi)+\varepsilon,$$

also, da der Parallelbereich beliebig nahe an $\mathfrak{F}$ gewählt werden kann,

$$h(-\Phi) \leqq k(\Phi). \tag{43}$$

b) Jetzt betrachten wir die zu (27) reziproke Integralformel (28), aber, wie unter 22b) auseinandergesetzt, mit gedrehtem Integrationsstrahl, in der Gestalt (39). Gemäß der Definition von $h(\varphi)$ gilt ($h(-\Phi) > -\infty$ angenommen), daß bei gegebenem ε, $\varepsilon > 0$, für genügend großes R

$$|F(Re^{-i\Phi})\exp(-(x+iy)Re^{-i\Phi})| < e^{-R(x\cos\Phi+y\sin\Phi-h(-\Phi)-\varepsilon)}. \tag{44}$$

Hieraus folgt, da ε beliebig klein sein kann, daß das Integral (39) sicher konvergiert, also $f(z)$ sicher regulär ist, solange

$$x\cos\Phi + y\sin\Phi - h(-\Phi) > 0 \tag{45}$$

ist. Daher muß $\bar{\mathfrak{F}}$, gemäß Definition, vgl. 22a), ganz in der zu (45) komplementären abgeschlossenen Halbebene

$$x\cos\Phi + y\sin\Phi \leqq h(-\Phi) \tag{46}$$

enthalten sein. Wenn $x+iy$ den Bereich $\bar{\mathfrak{F}}$ durchläuft, ist das Maximum der linken Seite von (46) genau $= k(\Phi)$, vgl. Nr. 17. Daher ist

$$k(\Phi) \leqq h(-\Phi). \tag{47}$$

Wäre $h(-\Phi) = -\infty$, so wäre das Integral (39) für alle Werte von z konvergent, also $f(z)$ überall regulär und somit identisch $= 0$, vgl. unter

22a). Abgesehen also von dem Fall der identisch verschwindenden Funktion, in dem $k(\varphi)$ nicht definiert und $h(\varphi) = -\infty$ gesetzt wurde, gilt (47) ausnahmslos.

25. Es folgt aus (43) und (47), daß die durch (40) definierte Funktion

$$h(\varphi) = k(-\varphi) \tag{48}$$

ist, also die Stützfunktion des konvexen Bereiches, der aus $\mathfrak{H}$ durch Spiegelung an der reellen Achse entsteht; dieser Bereich soll im folgenden mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet und das *Indikatordiagramm* von $F(z)$ genannt werden. Die Ergebnisse der Nummern 22 bis 24 können in folgenden Sätzen zusammengefaßt werden:

Satz II. *Es sei $F(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus und ihr Indikator $h(\varphi)$ sei durch*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\log|F(re^{i\varphi})| = h(\varphi)$$

definiert. Der Indikator $h(\varphi)$ ist eine periodische Funktion der reellen Variablen φ, mit Periode 2π, und die Stützfunktion eines konvexen Bereiches, der das Indikatordiagramm von $F(z)$ genannt wird; $h(\varphi)$ ist stetig und erfüllt für irgendein Wertetripel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, das den Bedingungen

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \pi, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \pi \tag{49}$$

genügt, die Ungleichung

$$h(\varphi_1)\sin(\varphi_3 - \varphi_2) + h(\varphi_2)\sin(\varphi_1 - \varphi_3) + h(\varphi_3)\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \geqq 0. \tag{50}$$

Satz III. *Es sei*

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \cdots$$

eine ganze Funktion vom Exponentialtypus, und das Spiegelbild ihres Indikatordiagramms in bezug auf die reelle Achse sei das konjugierte Diagramm genannt. Dann ist die durch die Potenzreihe

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \cdots = f(z)$$

definierte Funktion $f(z)$ (die als die Borelsche Transformierte von $F(z)$ bezeichnet wird) regulär außerhalb des konjugierten Diagramms und hat jeden extremen Punkt des konjugierten Diagramms zu singulärem Punkt.

Satz IV. *Ist $h(\varphi)$ der Indikator der ganzen Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus, so gilt bei gegebenem ε, $\varepsilon > 0$,*

$$|F(re^{i\varphi})| < e^{r(h(\varphi)+\varepsilon)}$$

für alle genügend großen Werte von r und für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

Zu vollständiger Begründung von Satz II ist noch Nr. 17 heranzuziehen. Satz IV wurde unter 24a) durch Formel (42) mitbewiesen[25]).

Korollarien.

26. *Man bezeichne mit* $M_{\alpha,\beta}(r)$ *das Maximum von* $|F(z)|$ *auf dem Kreisbogen* $|z| = r$, $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$, *und setze*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \log M_{\alpha,\beta}(r) = H(\alpha,\beta). \tag{51}$$

Dann ist $H(\alpha,\beta)$ *gleich dem Maximum des Indikators* $h(\varphi)$ *im abgeschlossenen Intervall* $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$.

Es sei φ fest gewählt, $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$. *Nach Definition ist*

$$|F(re^{i\varphi})| \leqq M_{\alpha,\beta}(r)$$

[25]) Die geometrische Interpretation der von Phragmén und Lindelöf herrührenden Ungleichung (50) wurde a. a. O. [2b]) gegeben; der Beweis der Ungleichung (50), wie der des Satzes IV, ist hier ganz verschieden von dem a. a. O. [6]). Satz III steht in enger Beziehung zu Borels und Servants Resultaten betreffend das *Borelsche Summabilitätspolygon* $\mathfrak{B}$ der Reihe

$$(*) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots .$$

Vgl. a. a. O. [7]), S. 169—171. $\mathfrak{B}$ sei als beschränkt vorausgesetzt. $\mathfrak{B}$ ist dann ein den Punkt $z = 0$ enthaltender konvexer Bereich (nicht notwendigerweise ein Polygon), der durch folgende Eigenschaft charakterisiert werden kann: Wenn ζ ein Randpunkt von $\mathfrak{B}$ ist, so liegt kein singulärer Punkt der Funktion (*) im Innern und es liegt mindestens einer am Rande derjenigen Kreisscheibe, die die Verbindungsstrecke der beiden Punkte $z = 0$ und $z = \zeta$ zum Durchmesser hat. Die Vereinigungsmenge aller derartiger, offen gedachter Kreisscheiben (ζ soll den vollen Rand von $\mathfrak{B}$ durchlaufen) ist ein offenes Gebiet, das mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet werden soll; der Rand von $\mathfrak{F}$ kann füglich als die Fußpunktskurve von $\mathfrak{B}$ in bezug auf den Nullpunkt bezeichnet werden. Bei Verwandlung von z in $1/z$ verwandelt sich (*), gemäß (18), in $zf(z)$, die besprochene Kreisscheibe in eine Halbebene, die den Nullpunkt nicht enthält, und am Rande einen singulären Punkt von $f(z)$ hat, und $\mathfrak{F}$ verwandelt sich in die Vereinigungsmenge aller dieser Halbebenen, also in das Äußere eines konvexen Bereiches, der den Nullpunkt enthält und das *konjugierte Diagramm* $\bar{\mathfrak{F}}$ *ist*. Man vergleiche die hiesige Formel (40) mit der Formel von Servant, a. a. O. [7]), S. 171, 6. Zeile v. u. (anstatt I lies F), den hiesigen Satz III mit den Bemerkungen a. a. O. [7]), S. 172, Zeile 6 - 10 v. o. usw. Die beiden Fragen a. a. O. [7]), S. 172, Z. 11—28 v. o., die von der ersten Auflage (1901) unverändert übernommen sind, waren schon durch die Untersuchungen von Phragmén und Lindelöf a. a. O. [6]) (1908) beantwortet; der hiesige Satz IV gibt auf die zweite Antwort. Der besprochene Übergang von $\mathfrak{B}$ zu $\bar{\mathfrak{F}}$ ist eine Transformation durch reziproke Polaren in bezug auf den Einheitskreis; die entsprechende Transformation im Raum wird bei Minkowski a. a. O. [20]), S. 146—147 betrachtet. — Wenn $\mathfrak{F}$ den Nullpunkt nicht enthält, so entsteht aus $\mathfrak{B}$ mittels der besagten Transformation durch reziproke Polaren der kleinste konvexe Bereich, der $\mathfrak{F}$ und den Nullpunkt zugleich umfaßt.

und hieraus folgt, gemäß den Definitionen (40) und (51) unmittelbar, daß

$$h(\varphi) \leqq H(\alpha, \beta) \quad \text{für} \quad \alpha \leqq \varphi \leqq \beta. \tag{52}$$

Dies war die selbstverständliche Hälfte des ausgesprochenen Satzes. Die andere Hälfte ist nicht selbstverständlich, aber ergibt sich unmittelbar aus Satz IV: Für ein von r abhängiges ϑ, $\alpha \leqq \vartheta \leqq \beta$, und ein festes ε, $\varepsilon > 0$, ist

$$M_{\alpha,\beta}(r) = |F(re^{i\vartheta})| \leqq e^{r(h(\vartheta)+\varepsilon)}$$

für genügend großes r, mit Benutzung von Satz IV, und $h(\vartheta)$ ist selbstverständlich nicht größer als das Maximum von $h(\varphi)$ im Intervall $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$; dies ergibt zusammen mit (52) die Behauptung.

Man bemerke noch, daß diejenigen φ des Intervalles $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$, für welche $h(\varphi) = H(\alpha, \beta)$ gilt, eine *abgeschlossene Menge* bilden. Nämlich $h(\varphi)$ ist stetig (Satz II). Ebenfalls aus der Stetigkeit von $h(\varphi)$ folgt, daß $H(\alpha, \beta)$ eine stetige Funktion der beiden Variablen α, β ist, und insbesondere, daß

$$\lim_{\substack{\alpha \to \varphi \\ \beta \to \varphi}} H(\alpha, \beta) = h(\varphi).$$

27. Es wurden $M_{0,2\pi}(r)$ und $H(0, 2\pi)$ schon in Nr. 20 betrachtet und dort kürzer mit $M(r)$ und H bezeichnet. Nach der vorangehenden Nr. 26 ist H das Maximum von $h(\varphi)$. Betrachten wir die Werte φ^*, für welche

$$h(\varphi^*) = H \tag{53}$$

ist, d. h. das Maximum erreicht wird. Die Richtungen φ^* sind für $F(z)$ die Richtungen des schnellsten Anwachsens; was bedeuten sie für $f(z)$, die Borelsche Transformierte? Das Indikatordiagramm $\mathfrak{J}$ von $F(z)$ liegt, nach Nr. 22, ganz im Kreis $|z| \leqq H$, und hat mindestens einen Punkt mit der Stützgeraden von der Normalen φ^*

$$x \cos \varphi^* + y \sin \varphi^* = h(\varphi^*) = H$$

gemeinsam, die den Kreis $|z| = H$ berührt. Der Berührungspunkt $He^{i\varphi^*}$ ist also ein Punkt des Indikatordiagramms, und zwar, da einziger Punkt auf der Stützgeraden, ein extremer Punkt davon. Es ist leicht zu sehen, daß auch umgekehrt ein auf der Kreisperipherie $|z| = H$ gelegener Punkt $He^{i\varphi^*}$ des Indikatordiagramms eine Lösung φ^* der Gleichung (53) liefert.

Satz III ergibt nun folgendes Resultat: *Der Indikator $h(\varphi)$ der ganzen Funktion*

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \cdots$$

vom Exponentialtypus erreicht sein Maximum für $\varphi = \varphi^*$ dann und nur dann, wenn der vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahl von der Richtung $-\varphi^*$ den Konvergenzkreis der Reihe

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \cdots$$

in einem singulären Punkte schneidet.

Insbesondere ist $h(\varphi)$ dann und nur dann konstant, d. h. das Indikatordiagramm von $F(z)$ ein Kreis, oder noch anders gesagt, das Anwachsen von $F(z)$ in allen Richtungen gleich stark, wenn $f(z)$ über seinen Konvergenzkreis hinaus nicht fortsetzbar ist.

28. Die Einführung des Indikatordiagramms ermöglicht in vielen Fragen eine bequeme geometrische Ausdrucksweise und die Anlehnung funktionentheoretischer Überlegungen an geläufige geometrische Verhältnisse. In den folgenden Beispielen[26]) will ich die geometrische Figur und den funktionentheoretischen Tatbestand einfach einander gegenüberstellen. Der Übergang vollzieht sich auf Grund des Satzes II mittels ganz elementarer Überlegungen der analytischen Geometrie, an Hand der Gleichung der Stützgeraden von der Normalenrichtung φ.

a) Unter der *Breite* des Indikatordiagramms senkrecht zur Richtung φ versteht man den Abstand der beiden zur Richtung φ parallelen Stützgeraden. Die Breite kann in Grenzfällen (Strecke, Punkt) verschwinden, sonst ist sie positiv.

Durch Ausrechnung der Breite findet man, daß der Indikator $h(\varphi)$ einer beliebigen ganzen Funktion vom Exponentialtypus die Ungleichung

$$h\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + h\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \geqq 0$$

erfüllt.

b) Der Nullpunkt kann entweder im Indikatordiagramm oder außerhalb liegen; im letzteren Falle erscheint das Indikatordiagramm vom Nullpunkt aus unter einem Gesichtswinkel ω, $0 \leqq \omega \leqq \pi$. Anders gesagt, liegt der Nullpunkt entweder an der negativen Seite aller Stützgeraden oder an der positiven Seite einiger, deren Normalenrichtung in einem Winkelraum von der Öffnung $\pi - \omega$ variiert.

Es gibt entweder keine Richtungen, in welchen eine ganze Funktion vom Exponentialtypus exponentiell gegen Null strebt (d. h. $h(\varphi) < 0$ ist), oder diese Richtungen erfüllen einen einzigen zusammenhängenden, offenen Winkelraum, dessen Öffnung $\leqq \pi$ ist.

---

[26]) Vgl. Phragmén und Lindelöf, a. a. O. [6]).

c) Es sei der Nullpunkt außerhalb des Indikatordiagramms gelegen. Man betrachte den kleinsten Kreis vom Mittelpunkt $z = 0$, der das Indikatordiagramm enthält, und den größten Kreis von demselben Mittelpunkt, der keinen Punkt des Indikatordiagramms im Innern enthält. Der ersterwähnte Kreis umfaßt den zweiterwähnten konzentrischen (im Grenzfalle eines punktförmigen Indikatordiagramms fallen sie zusammen). Die Radien dieser Kreise sind das Maximum bzw. das mit umgekehrtem Vorzeichen genommene Minimum der Stützfunktion.

Es sei $F(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus, $h(\varphi)$ ihr Indikator, H das Maximum von $h(\varphi)$. Dann ist für alle Werte φ

$$h(\varphi) \geqq -H.$$

d) Ist $F(z)$ durch (17) gegeben, so ist der erste unter c) erwähnte Kreis der Konvergenzkreis der Entwicklung (18) von $f(z)$ in der Umgebung von $z = \infty$ (vgl. unter Nr. 20 und 27). Nehmen wir, wie unter c), wieder an, daß $z = 0$ außerhalb des Indikatordiagramms liegt; dann läßt sich, gemäß Satz III, $f(z)$ in den Punkt $z = 0$ hinein analytisch fortsetzen, und zwar auf die unter 22b), 24b) besprochene Art, durch Drehung des Integrationshalbstrahls von (28). Der Konvergenzkreis der Potenzreihe, die $f(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ darstellt, ist mit den beiden unter c) betrachteten Kreisen konzentrisch und ist, gemäß Satz III, *zwischen ihnen enthalten.* (Er fällt mit dem inneren Kreis zusammen, falls der dem Nullpunkt nächstgelegene Punkt des Indikatordiagramms ein singulärer Punkt von $f(z)$, also insbesondere, wenn er ein extremer Punkt ist; er fällt mit dem äußern Kreis zusammen z. B. dann, wenn ein Bogen davon singuläre Linie der sonst überall regulären $f(z)$ ist.)

Die in Nr. 24b) besprochene Fortsetzung von $f(z)$ gibt folgende Entwicklung um den Nullpunkt:

$$f(z) = \int_0^{\infty(\psi)} F(Z)\, e^{-zZ}\, dZ = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} \int_0^{\infty(\psi)} F(Z)\, Z^n\, dZ,$$

wobei $h(\psi) < 0$ vorausgesetzt ist. Indem wir den Konvergenzradius dieser Reihe mit dem der Reihe (18) vergleichen, erhalten wir die bemerkenswerte Ungleichung[27])

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{1}{n!} \int_0^{\infty(\psi)} F(Z)\, Z^n\, dZ \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \geqq 1.$$

---

[27]) Der zweite Faktor links ist gleich dem Maximum von $h(\varphi)$, der erste Faktor gibt eine Abschätzung für das als negativ vorausgesetzte Minimum von $h(\varphi)$, mittels Eigenschaften von $F(z)$, die in der Definition (40) von $h(\varphi)$ nicht explizite auftreten.

(Fortsetzung der Fußnote [27]) auf nächster Seite.)

29. Die genauere Erwägung der einzelnen Schritte des Beweisganges, der zu den Sätzen II bis IV führte, gibt auch Anlaß zu einer Reihe von weiteren Korollarien, von denen hier nur zwei hervorgehoben werden sollen.

a) Das Konvergenzgebiet des entlang der positiven reellen Achse erstreckten Integrals

$$\int_0^{+\infty} F(Z)e^{-zZ}\,dZ \tag{54}$$

ist bekanntlich eine Halbebene, die durch eine vertikale Gerade von links begrenzt ist. Falls $F(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus ist, kann man Genaueres behaupten, nämlich 1. daß (54) *im Innern der Konvergenzhalbebene absolut konvergiert* und 2. daß *am Rande der Konvergenzhalbebene ein singulärer Punkt der durch* (54) *dargestellten Funktion liegt.*

In der Tat konvergiert (54), wie unter 24b) dargelegt wurde, absolut für $\Re z > h(0)$. Die Grenzgerade $\Re z = h(0)$ dieser Halbebene ist aber eine Stützgerade des konjugierten Diagramms (die von Normalenrichtung 0), enthält als solche einen extremen Punkt davon, vgl. unter Nr 19, und dieser extreme Punkt ist, gemäß Satz III, ein singulärer Punkt der durch (54) dargestellten Funktion $f(z)$. Daher kann (54) links von $\Re z = h(0)$ nicht konvergieren, diese Gerade ist die Konvergenzgerade.

b) *Es sei $F(z)$ eine ganze Funktion, a und b zwei komplexe Zahlen. Dann haben die beiden Potenzreihen*

$$\frac{F(a)}{z} + \frac{F'(a)}{z^2} + \frac{F''(a)}{z^3} + \ldots = f_1(z), \quad \frac{F(b)}{z} + \frac{F'(b)}{z^2} + \frac{F''(b)}{z^3} + \ldots = f_2(z)$$

denselben Konvergenzradius, und wenn dieser endlich ist, haben ihre Fortsetzungen dieselben singulären Punkte. Genauer gesagt, sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ entlang derselben, von ∞ ausgehenden und nie mehr dorthin zurückkehrenden Wege fortsetzbar.

Eine andere Abschätzung von derselben Natur sei hier erwähnt. Wenn U den Umfang von $\mathfrak{F}$ und $N(r)$ die Anzahl derjenigen Nullstellen von $F(z)$ bezeichnet, deren Betrag r nicht übersteigt, so gilt (falls $F(0) \neq 0$)

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \int_0^r N(t)\,t^{-1}\,dt \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\,d\varphi = \frac{U}{2\pi};$$

diese Ungleichung ist eine leichte Folgerung aus Satz IV und der bekannten Jensenschen Formel. Wenn man die Nullstellen betrachtet, die sich einer Richtung anschließen, so kann man die Breite des Indikatordiagramms senkrecht zu der Richtung abschätzen, ferner Kriterien dafür angeben, daß der Rand des Indikatordiagramms geradlinige Begrenzungstücke oder Ecken aufweist. Vgl. a. a. O. [2b]), S. 182—183.

$f_1(z)$ steht in derselben Beziehung zu $F(a+z)$ und $f_2(z)$ zu $F(b+z)$, wie $f(z)$ in Formel (18) zu $F(z)$ in Formel (17). Wenn der Konvergenzradius von $f_1(z)$ endlich ist, so ist $F(a+z)$, gemäß Satz I, eine ganze Funktion vom Exponentialtypus. Also ist, wie leicht aus der Definition ersichtlich, $F(b+z)$ ebenfalls vom Exponentialtypus. Somit ist $f_1(z)$ die Borelsche Transformierte von $F(a+z)$, $f_2(z)$ die von $F(b+z)$.

Es besteht nun eine lineare Beziehung zwischen $f_1(z)$ und $f_2(z)$, die man, falls $a=0$ und $b=1$ ist, der Formel (28) entnimmt, indem man den Integrationsweg durch den Punkt $Z=1$ unterbricht. Im allgemeinen Fall lautet die Beziehung, die auch direkt leicht zu bestätigen ist, so:

$$e^{-az} f_1(z) - e^{-bz} f_2(z) = \int_a^b F(Z)\, e^{-zZ}\, dZ,$$

und zeigt, da die rechte Seite eine ganze Funktion von z ist, daß $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die gleichen Singularitäten besitzen. Hieraus folgt, daß die Konvergenzradien übereinstimmen, ferner unter Heranziehung von Satz III, daß auch die Indikatordiagramme von $F(a+z)$ und $F(b+z)$ übereinstimmen. Letzteres kann man natürlich auch direkt aus der Definition (40), unter Heranziehung von Satz IV und der Stetigkeit des Indikators, einsehen.

Das Indikatordiagramm von Summe und Produkt.

30. Es sollen jetzt mehrere ganze Funktionen vom Exponentialtypus

$$F(z),\ F_1(z),\ F_2(z), \ldots, F_n(z)$$

gleichzeitig betrachtet werden; ihre Indikatoren seien der Reihe nach mit

$$h(\varphi),\ h_1(\varphi),\ h_2(\varphi), \ldots, h_n(\varphi)$$

bezeichnet. Nach Satz IV in Nr. 25 gilt bei gegebenem ε, $\varepsilon > 0$, für genügend großes r

$$|F_\nu(re^{i\varphi})| < e^{r(h_\nu(\varphi)+\varepsilon)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots. n).$$

Daher gilt, wenn

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + \ldots + F_n(z)$$

ist, für genügend großes r

$$|F(re^{i\varphi})| < n\, e^{r(\mathrm{Max}(h_1(\varphi), \ldots, h_n(\varphi))+\varepsilon)},$$

also

$$h(\varphi) \leqq \mathrm{Max}(h_1(\varphi), h_2(\varphi), \ldots, h_n(\varphi)).$$

Dies kann auch in dem Falle als richtig interpretiert werden, in dem $F(z)$ identisch verschwindet, da dann $h(\varphi)$ sinngemäß $= -\infty$ zu setzen ist. In geometrischer Ausdrucksweise, vgl. Nr. 18, kann das Besprochene so gefaßt werden:

Das Indikatordiagramm einer Summe ist ein unechter oder echter (eventuell leerer) konvexer Teilbereich des kleinsten konvexen Bereiches, der die Indikatordiagramme sämtlicher Summanden enthält.

31. Wenn

$$F(z) = F_1(z)\,F_2(z)$$

ist, erhalten wir

$$|F(re^{i\varphi})| < e^{r(h_1(\varphi)+h_2(\varphi)+2\varepsilon)},$$

also

$$h(\varphi) \leqq h_1(\varphi) + h_2(\varphi).$$

Jetzt kann $F(z)$ nur dann identisch verschwinden, wenn einer der Faktoren $F_1(z)$ und $F_2(z)$ identisch verschwindet. In geometrischer Ausdrucksweise:

Das Indikatordiagramm eines Produktes nichtverschwindender Faktoren ist ein unechter oder echter, aber nicht leerer konvexer Teilbereich des Summenbereiches der Indikatordiagramme der Faktoren.

Daß sowohl der Fall des unechten wie der des echten Teilbereiches tatsächlich vorkommt, kann durch Beispiele belegt werden, vgl. Nr. 35.

Wird

$$F_1(z) = b_0 + \frac{b_1 z}{1!} + \frac{b_2 z^2}{2!} + \ldots, \qquad F_2(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{1!} + \frac{c_2 z^2}{2!} + \ldots$$

gesetzt, so ist

$$F_1(z)\,F_2(z) = \sum_0^\infty \left(b_0 c_n + \binom{n}{1} b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0\right)\frac{z^n}{n!}$$

und die vorangehende Bemerkung über das Indikatordiagramm des Produktes liefert in Verbindung mit Satz III die folgende Aussage:

Wenn $\overline{\mathfrak{J}}_1$ und $\overline{\mathfrak{J}}_2$ konvexe Bereiche sind und die Funktionselemente

$$\frac{b_0}{z} + \frac{b_1}{z^2} + \frac{b_2}{z^3} + \ldots \quad \text{und} \quad \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots$$

sich außerhalb $\overline{\mathfrak{J}}_1$ bzw. $\overline{\mathfrak{J}}_2$ analytisch fortsetzen lassen, so läßt sich das Funktionselement

$$\sum_0^\infty \left(b_0 c_n + \binom{n}{1} b_1 c_{n-1} + \binom{n}{2} b_2 c_{n-2} + \ldots + b_n c_0\right)\frac{1}{z^{n+1}}$$

außerhalb des Summenbereiches $\overline{\mathfrak{J}}_1 + \overline{\mathfrak{J}}_2$ analytisch fortsetzen.

Dies ist nur ein Teil eines wohlbekannten von A. Hurwitz herrührenden Satzes[28]). Aber der Weg, auf dem wir dazu gelangt sind, führt bei

[28]) A. Hurwitz, Comptes Rendus, Paris **128** (1899), p. 350—353.

Bestimmung der Singularitäten der zusammengesetzten Reihe weiter, als der übliche[29]).

Beispiele.

32. Es sei c eine Konstante, $c = |c| e^{-i\gamma}$ und

$$F(z) = e^{cz} = 1 + \frac{cz}{1!} + \frac{c^2 z^2}{2!} + \dots .$$

In diesem einfachsten Falle ist der in der Definition (40) des Indikators unter dem Limeszeichen auftretende Ausdruck von r unabhängig:

$$r^{-1} \log |F(re^{i\varphi})| = |c| \cos(\varphi - \gamma) = h(\varphi).$$

$h(\varphi)$ ist die Stützfunktion des Punktes $\bar{c} = |c| e^{i\gamma}$ (nicht des Punktes c!). Das Indikatordiagramm besteht aus dem Punkt $\bar{c}$, das konjugierte Diagramm aus dem einzigen singulären Punkte c der Borelschen Transformierten

$$\frac{1}{z} + \frac{c}{z^2} + \frac{c^2}{z^3} + \dots = \frac{1}{z - c}$$

von e^{cz}.

Es seien nun die Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n$ voneinander, die Konstanten $C_1, C_2, \dots, C_n$ von Null verschieden, es sei $c_1 = |c_1| e^{-i\gamma_1}, \dots, c_n = |c_n| e^{-i\gamma_n}$ und

$$F(z) = C_1 e^{c_1 z} + C_2 e^{c_2 z} + \dots + C_n e^{c_n z}$$

gesetzt. Es ist jetzt, wie leicht ersichtlich,

$$h(\varphi) = \lim_{r \to \infty} r^{-1} \log |F(re^{i\varphi})| = \operatorname{Max}(|c_1| \cos(\varphi - \gamma_1), \dots, |c_n| \cos(\varphi - \gamma_n)),$$

vorausgesetzt, daß es unter den n Größen unter dem Maximumzeichen nur eine einzige größte gibt, also für alle Werte von φ zwischen 0 und 2π mit Ausnahme gewisser endlich vielen. Dadurch ist $h(\varphi)$, als stetige Funktion von φ (vgl. Satz II) für alle Werte von φ bestimmt, und zwar ist $h(\varphi)$ die Stützfunktion des kleinsten konvexen Polygons, das die Punkte $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$ umfaßt, wie es aus Nr. 18 oder aus einer lehrreichen direkten Diskussion hervorgeht. Das genannte Polygon ist das Indikatordiagramm (vgl. Nr. 30). Sein Spiegelbild in bezug auf die reelle Achse, das konju-

[29]) Der a. a. O. [2]) bewiesene Satz 3 ist im wesentlichen gleichbedeutend mit dem folgenden: *Das Indikatordiagramm eines Produktes nichtverschwindender Faktoren ist gleich dem Summenbereich der Indikatordiagramme, falls das Indikatordiagramm des einen Faktors aus einem einzigen Punkt besteht.* Auf die Konsequenzen dieses Satzes kann in der vorliegenden Mitteilung nicht näher eingegangen, nur in einigen der folgenden Fußnoten verwiesen werden.

gierte Diagramm, ist das kleinste konvexe Polygon, das die n Pole c_1, $c_2, \ldots, c_n$ der Borelschen Transformierten

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_1 c_1^\nu + C_2 c_2^\nu + \ldots + C_n c_n^\nu}{z^{\nu+1}} = \frac{C_1}{z-c_1} + \frac{C_2}{z-c_2} + \ldots + \frac{C_n}{z-c_n}$$

umfaßt. Die extremen Punkte (Eckpunkte) des konjugierten Diagramms sind Pole der Borelschen Transformierten, die übrigen Randpunkte (die inwendigen Punkte der Polygonseiten) sind im allgemeinen reguläre Punkte, können aber auch Pole sein [30]).

Insbesondere ist das Indikatordiagramm von

$$\sin \pi z = \frac{1}{2i}(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}) = \pi z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right)\ldots$$

die Verbindungsstrecke der Punkte $-i\pi$ und $+i\pi$. Dieses Beispiel wird in der nächsten Nummer verallgemeinert.

---

[30]) Wird, allgemeiner als im Text, $F(z) = P_1(z)\, e^{c_1 z} + \ldots + P_n(z)\, e^{c_n z}$ gesetzt, wo $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ Polynome sind, die nicht identisch verschwinden, so bleibt das Indikatordiagramm dasselbe Polygon, und es bestehen zwischen den Nullstellen von $F(z)$ und dem Indikatordiadramm $\mathfrak{J}$ bemerkenswerte Zusammenhänge: (I) Die Nullstellen schließen sich asymptotisch den äußeren Normalen der Seiten von $\mathfrak{J}$ an. (II) Mit den Bezeichnungen der Fußnote [27]) (und weitergehend als in dem dort besprochenen allgemeinen Fall) gilt

$$2\pi N(r) = Ur + O(1).$$

(III) Es sei c der „Krümmungsschwerpunkt" von $\mathfrak{J}$, das heißt der Schwerpunkt einer Gesamtmasse 2π, die auf die Ecken von $\mathfrak{J}$ so verteilt ist, daß eine Ecke mit dem Innenwinkel δ die Masse $\pi - \delta$ erhält; dann gilt

$$F(z) = F(0)\, e^{cz}\left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_3}\right)\ldots;$$

in dem nur bedingt konvergenten Produkt treten die Nullstellen von $F(z)$ nach wachsenden Beträgen geordnet auf, $F(0) \neq 0$ ist vorausgesetzt. (I) bei Pincherle, a. a. O. [9a]) Memorie ..., S. 56; ein wesentlicher, wenn auch besonders bequemer Spezialfall von (II) bei Ch. E. Wilder, American Math. Soc. Transactions **18** (1917), p. 415 bis 442, insbesondere p. 420—422, und in der russischen Dissertation von J. D. Tamarkin, vgl. London Math. Soc. Journal **2** (1927), p. 66—69 und Mathematische Zeitschrift **27** (1928), S. 1—54, insbesondere S. 25—23; (II) mit $O(\log r)$ an Stelle von $O(1)$ bei G. Pólya, Münchener Sitzungsberichte (1920), S. 285—290; die Methode ergibt allerdings in dem von Wilder und Tamarkin betrachteten Fall ohne weiteres $O(1)$; (III) daselbst. — Ein voller Beweis von (II) ist meines Wissens noch nicht publiziert. Vgl. ferner E. Schwengeler, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen spezieller ganzen Funktionen, Dissertation Zürich 1925 (auch für weitere Literatur); auch Jahresbericht d. deutsch. Math. Ver. **37** (1928), S. *82—84*, Lösung der Aufgabe 24. Eine analoge Frage bei E. C. Titchmarsh, London Math. Soc. Proceedings (2) **25** (1926), p. 283—302.

33. Es sei $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ eine meßbare Folge von der Dichte Δ, $\Delta \geqq 0$, $\varrho_{m+1} - \varrho_m \geqq l > 0$, $\varrho_1 \geqq l$. Die in Nr. 14 betrachtete ganze Funktion

$$F(z) = \left(1 - \frac{z^2}{\varrho_1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\varrho_2^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\varrho_3^2}\right)\ldots$$

ist vom Exponentialtypus. In der Tat ist

$$|F(re^{i\varphi})| \leqq F(ir) < e^{(\Delta\pi+\varepsilon)r}$$

bei gegebenem ε und genügend großem positiven r, gemäß der Formel (47) in Nr. 14. Nach derselben Formel ist der Indikator

$$h(\varphi) = \lim_{r\to\infty} r^{-1}\log|F(re^{i\varphi})| = \pi\Delta|\sin\varphi|$$

für $\varphi \not\equiv 0, \pi \pmod{2\pi}$. Aus der Stetigkeit von $h(\varphi)$, vgl. Satz II, folgt somit $h(0) = h(\pi) = 0$, und das Indikatordiagramm ist die Verbindungsstrecke der Punkte $-i\pi\Delta$ und $i\pi\Delta$. Falls $\Delta = 0$ ist, reduziert sich das Indikatordiagramm auf den Nullpunkt.

34. Der Indikator einer ganzen Funktion vom Exponentialtypus genügt nach Satz II der Bedingung, daß er die Stützfunktion eines konvexen Bereiches ist. Er genügt *keiner weitergehenden Bedingung.* Es kann nämlich *zu jedem vorgelegten konvexen Bereich* $\mathfrak{H}$ *eine ganze Funktion* $F(z)$ *vom Exponentialtypus gefunden werden, von dem* $\mathfrak{H}$ *das Indikatordiagramm ist.*

Diese Behauptung kann auf viele Arten bewiesen werden. Die Beispiele der Nr. 32 einerseits und gewisse geläufige Beispiele von Funktionen mit beschränktem Existenzbereich andererseits führen zu derselben Konstruktion von $F(z)$, nämlich zur folgenden:

Es sei $\overline{\mathfrak{H}}$ das Spiegelbild des vorgegebenen konvexen Bereiches $\mathfrak{H}$ in bezug auf die reelle Achse, und $c_0, c_1, c_2, \ldots$ seien Randpunkte von $\overline{\mathfrak{H}}$, die eine am Rande von $\overline{\mathfrak{H}}$ überall dichte abzählbare Folge bilden. Man setze

$$F(z) = e^{c_0 z} + 2^{-1} e^{c_1 z} + 2^{-2} e^{c_2 z} + \ldots + 2^{-n} e^{c_n z} + \ldots .$$

Die Borelsche Transformierte ist, wie man an Hand der Definition findet,

$$f(z) = \frac{1}{z - c_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{z - c_1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\frac{1}{z - c_n} + \ldots;$$

sie ist regulär im Äußeren des konvexen Bereiches $\overline{\mathfrak{H}}$ und wird singulär in jedem Randpunkte davon. Daher ist $\overline{\mathfrak{H}}$ das konjugierte Diagramm, nach der Definition unter 22a), und das vorgelegte $\mathfrak{H}$ das Indikatordiagramm von $F(z)$, gemäß Satz III.

In dem eben Bewiesenen ist z. B. auch folgende Tatsache enthalten: Es sei $\mathfrak{M}$ eine im Intervall $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ gelegene, nicht leere, abgeschlossene Punktmenge, die entweder keinen der beiden Punkte 0 und 2π enthält,

oder beide; sonst sei $\mathfrak{M}$ beliebig. Es gibt eine ganze Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus, dessen Indikator $h(\varphi)$ in allen Punkten von $\mathfrak{M}$ und nur in diesen Punkten ihr Maximum erreicht. – In der Tat können wir das eben Bewiesene auf einen konvexen Bereich $\mathfrak{H}$ anwenden, der die kleinste konvexe Hülle der Punkte $e^{i\varphi^*}$ ist, wobei φ^* zur Menge $\mathfrak{M}$ gehört. Wir erhalten übrigens, mit Rücksicht auf Nr. 27, im neuen Gewand nur die wohlbekannte Tatsache wieder, daß eine beliebige abgeschlossene Menge auf einem Kreisrand als die Menge der Singularitäten aufgefaßt werden kann, die auf der Konvergenzgrenze einer Potenzreihe liegen.

Wir können das Bewiesene auch so fassen, daß der *Indikator keine Eigenschaften besitzt, außer denjenigen, die aus seiner Periodizität und der Ungleichung* (50) *folgen.* In der Tat, es sei irgendeine reelle Funktion $h(\varphi)$ der reellen Variablen φ mit der Periode 2π vorgelegt, die der Ungleichung (50) genügt. Dann ist $h(\varphi)$, nach Nr. 17, die Stützfunktion eines konvexen Bereiches $\mathfrak{H}$, und folglich, wie eben besprochen, der Indikator einer ganzen Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus, von der $\mathfrak{H}$ das Indikatordiagramm ist[31]).

35. Es sei vorgelegt ein beliebiger konvexer Bereich $\mathfrak{H}$; es gibt eine ganze Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus, so beschaffen, daß das *Indikatordiagramm von $F(z)$ der vorgelegte Bereich $\mathfrak{H}$ und das von $F(z)\,F(-z)$ der Nullpunkt ist.* Es kann also, wovon schon in Nr. 31 gesprochen wurde, tatsächlich vorkommen, daß das Produkt ein punktförmiges Indikatordiagramm besitzt, während einer der Faktoren ein Indikatordiagramm von vorgegebener Form und Lage hat.

Ich begnüge mich hier mit einer Skizze der Konstruktion von $F(z)$. Man kommt darauf, indem man sich genau überlegt, wieso die ganze Funktion $1/(\Gamma(z)\,\Gamma(-z))$ langsamer wachsen kann als die Funktion $1/\Gamma(z)$.

---

[31]) Jede allein auf den Indikator $h(\varphi)$ bezügliche allgemeine Aussage muß man also aus der Ungleichung (50) folgern können. Man kann dies z. B. an den in Nr. 28 unter a), b), c) erörterten Sätzen bestätigen. Als ein weiteres Beispiel unter vielen betrachte man den Satz I der Arbeit von N. Akhyeser, Rendiconti d. Circ. Mat. Palermo **51** (1927) p. 390—393, der im wesentlichen behauptet, daß die Annahmen

$$\text{Max } h(\varphi) = H = 1, \qquad h(\alpha) < -\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad h(-\alpha) < -\cos\frac{\alpha}{2}$$

$(0 < \alpha < \pi)$ für eine nicht identisch verschwindende ganze Funktion vom Exponentialtypus unverträglich sind. Man nehme, indem man nötigenfalls φ mit $\pi - \varphi$ vertauscht, $\alpha \leqq \frac{1}{2}\pi$ an, und setze in (50) $\varphi_1 = -\alpha$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = \alpha$; es ergibt sich

$$2\,h(0)\cos\alpha \leqq h(-\alpha) + h(\alpha) < -2\cos\frac{\alpha}{2},$$

also $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ und $h(0) < -1$, was der Annahme über H widerspricht.

Wir machen den Ansatz

$$F(z) = e^{az} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-2} \text{ konvergent}$$

und behalten uns vor, die Konstanten $a, a_1, a_2, \ldots$ zweckentsprechend zu wählen.

a) Um der Forderung betreffend das Indikatordiagramm von

$$F(z)\,F(-z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_n^2}\right)$$

zu genügen, richten wir es so ein, daß die Folge $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$ eine meßbare Folge von der Dichte Null im Sinne des ersten Kapitels ist. Dann ist nämlich, gemäß dem Spezialfall $A = 0$ der Nr. 33, bei gegebenem positiven ε für genügend großes $|z|$

$$|F(z)\,F(-z)| \leqq \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left|\frac{z}{a_n}\right|^2\right) < e^{\varepsilon |z|}$$

(was auch direkt leicht zu bestätigen ist), und diese Ungleichung bedeutet eben, daß das Indikatordiagramm von $F(z)\,F(-z)$ der Nullpunkt ist.

b) Um der Forderung betreffend das Indikatordiagramm von $F(z)$ zu genügen, zerlegen wir $F(z)$ in drei Faktoren, indem wir

$$\prod_{|a_n| \leqq |z|} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = \varphi(z), \qquad \prod_{|a_n| > |z|} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} = \psi(z),$$

$$a - \sum_{a_n \leqq z} \frac{1}{a_n} = \chi(z) \cdots \chi(|z|) = \chi,$$

$$F(z) = \varphi(z)\,\psi(z)\,e^{\chi z}$$

setzen. Bei *festem* χ würde das Indikatordiagramm des letzten Faktors $e^{\chi z}$ der Punkt χ sein, vgl. Nr. 32. Nun variiert aber χ mit wachsendem z, und zwar sprungweise: wir richten es so ein, daß χ eine abzählbare Punktmenge durchläuft, die ganz in $\mathfrak{J}$ enthalten ist und sich in jedem Randpunkt von $\mathfrak{J}$ häuft. Sorgen wir noch gleichzeitig dafür, daß $e^{\chi z}$ die beiden anderen Faktoren von $F(z)$, nämlich $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ „genügend überwiegt", und zwar hauptsächlich dann, wenn χ einem Randpunkt von $\mathfrak{J}$ nahekommt, so stellt sich $\mathfrak{J}$ als das Indikatordiagramm von $F(z)$ heraus.

Die Durchführung dieser Konstruktionsskizze würde uns hier zu sehr aufhalten, und darum sei sie auf eine andere Gelegenheit verschoben[32].

[32]) Für das skizzierte Beispiel ist die linke Seite der in Fußnote [27]) gegebenen Ungleichung $= 0$, die rechte > 0, so daß der Fall der Ungleichheit tatsächlich eintritt.

Die regularitätserhaltenden, fortsetzbaren und beschränkten linearen Funktionaloperationen.

36. Satz V. *Es sei $F(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus. Ihre Borelsche Transformierte sei mit $f(z)$, ihr Indikatordiagramm mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet.*

Es sei $\Psi(z)$ eine eindeutige Funktion. Die Gesamtheit derjenigen Punkte der Ebene, in denen $\Psi(z)$ nicht regulär ist, sei mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet, und es sei $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{S}^*$ gesetzt. Es sei $\mathfrak{D}$ ein maximaler zusammenhängender Teil der Komplementärmenge von $\mathfrak{S}^*$, d. h. ein solcher, der durch Hinzufügung von Punkten der Komplementärmenge nicht erweitert werden kann.

Ist z ein Punkt des Gebietes $\mathfrak{D}$, so stellt das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \Psi(z-u)f(u)\,du = \Psi^*(z), \tag{55}$$

dessen Integrationslinie der in positivem Sinne umlaufene Rand von $\overline{\mathfrak{J}} + \varepsilon\mathfrak{E}$ ist (das positive ε kann unterhalb einer gewissen Schranke beliebig klein genommen werden), eine in $\mathfrak{D}$ reguläre und eindeutige Funktion dar.

Da $\Psi(z)$ eindeutig ist, wäre es zulässig $\mathfrak{S}$ als die Menge der singulären Punkte von $\Psi(z)$ zu bezeichnen.

Die Bezeichnungen $\mathfrak{S} + \overline{\mathfrak{J}}$, $\overline{\mathfrak{J}} + \varepsilon\mathfrak{E}$ wurden unter Nr. 15 bis 16 erklärt; $\mathfrak{J} + \varepsilon\mathfrak{E}$ ist der Parallelbereich zu $\mathfrak{J}$ im Abstand ε.

$\mathfrak{J}$ ist beschränkt und abgeschlossen, $\mathfrak{S}$ ist im allgemeinen unbeschränkt, aber im Endlichen abgeschlossen. Daher ist $\mathfrak{S} + \mathfrak{J} = \mathfrak{S}^*$ im Endlichen abgeschlossen, vgl. Nr. 15. Da $\mathfrak{D}$ ein möglichst großer zusammenhängender Teil der Komplementärmenge von $\mathfrak{S}^*$ sein soll, sind alle Randpunkte von $\mathfrak{D}$ Punkte von $\mathfrak{S}^*$ und $\mathfrak{D}$ ist eine offene zusammenhängende Menge, ein Gebiet.

$\mathfrak{S} + \mathfrak{J}$ hat keinen Punkt mit $\mathfrak{D}$ gemeinsam. Man schließt hieraus, vgl. Nr. 15, daß $\mathfrak{D} - \mathfrak{J}$ keinen Punkt mit $\mathfrak{S}$ gemeinsam hat. D. h. jeder Punkt z von $\mathfrak{D}$ ist so beschaffen, daß der abgeschlossene konvexe Bereich $z - \mathfrak{J}$ ganz im Regularitätsgebiet von $\Psi(z)$ enthalten ist. Es sei δ der Abstand von $z - \mathfrak{J}$ vom nächsten singulären Punkt von $\Psi(z)$, und das Integral (55) sei um den Rand von $\mathfrak{J} + \varepsilon\mathfrak{E}$ erstreckt, wo

$$0 < \varepsilon < \delta. \tag{56}$$

Da im Innern von $z - \mathfrak{J} + \delta\mathfrak{E}$ nur reguläre Punkte von $\Psi(z)$ liegen und $f(z)$ außerhalb $\mathfrak{J}$ regulär bleibt, vgl. Satz III, ist $\Psi(z-u)$ regulär, wenn u auf und innerhalb, und $f(u)$ regulär, wenn u auf und außerhalb der

festgelegten Integrationslinie von (55) variiert. Der Wert des Integrals (55) wird also durch hinreichend kleine Verlagerungen der Integrationslinie nicht geändert, und ist insbesondere von der Wahl von ε unabhängig, wenn nur (56) beobachtet wird.

Wir sehen allgemeiner: Wenn z eine ganz im Innern von $\mathfrak{D}$ gelegene abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{A}^*$ durchläuft, bestreicht $z - \bar{\mathfrak{F}}$ die ganz im Innern des Regularitätsgebietes von $\Psi(z)$ gelegene abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{A}^* - \bar{\mathfrak{F}}$. Es sei δ die kürzeste Entfernung von $\mathfrak{A}^* - \bar{\mathfrak{F}}$ vom Rande dieses Regularitätsgebietes. Wenn $0 < \varepsilon < \delta$ ist, hat das um den Rand von $\bar{\mathfrak{F}} + \varepsilon$ erstreckte Integral (55) für jeden Punkt z von $\mathfrak{A}^*$ einen Sinn und einen von ε unabhängigen Wert. Wählen wir $\mathfrak{A}^*$ als kleinen Kreis, so sehen wir, daß $\Psi^*(z)$ in der Umgebung irgendeines Punktes von $\mathfrak{D}$ analytisch ist. Wählen wir $\mathfrak{A}^*$ als stetige Verbindungslinie zweier in $\mathfrak{D}$ gelegenen Punkte (sie existiert für irgend zwei Punkte von $\mathfrak{D}$, da $\mathfrak{D}$ zusammenhängend ist), so sehen wir, daß die durch die Integraldarstellung (55) eindeutig bestimmten Werte $\Psi(z)$ sich zu einer und derselben analytischen Funktion innerhalb $\mathfrak{D}$ zusammenschließen.

37. Das zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{D}$ ist durch Angabe eines seiner Punkte, nennen wir ihn z_0, eindeutig bestimmt[33]).

Betrachten wir jetzt mehrere eindeutige Funktionen $\Psi(z)$, $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z), \ldots$, die alle in dem abgeschlossenen Bereiche $z_0 - \mathfrak{F}$ regulär sind, wo z_0 einen festen Punkt bedeutet. Wie $\mathfrak{D}$ und Ψ^* zu Ψ, so seien die Gebiete $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \ldots$ und die Funktionen $\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \ldots$ zu Ψ_1 bzw. Ψ_2 bzw. $\Psi_3 \ldots$ zugeordnet, und zwar sollen alle Gebiete $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots$ den Punkt z_0 enthalten. Es ist

$$\Psi_1^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \Psi_1(z-u) f(u)\, du,$$

Ψ_1^* ist in $\mathfrak{D}_1$ regulär und eindeutig, usw. Die Zuordnung der Funktionen $\Psi^*, \Psi_1^*, \ldots$ zu Ψ bzw. $\Psi_1, \ldots$, die durch die Angabe der ganzen Funktion $F(z)$ vom Exponentialtypus und des Punktes z_0 vollständig bestimmt ist, ist eine Funktionaloperation. Es soll im folgenden $\Psi^*(z)$ als die *Transformierte von* $\Psi(z)$ *mittels* $F(z)$ bezeichnet werden. Die Beziehung zwischen $F(z)$, $\Psi(z)$ und $\Psi^*(z)$ wird in Zeichen so ausgedrückt:

$$\Psi^*(z) = F(-D)\,\Psi(z). \tag{57}$$

---

[33]) In Kenntnis von z_0 können wir, wie aus Nr. 36 hervorgeht, $\mathfrak{D}$ auch folgendermaßen definieren: Der Punkt z_1 gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{D}$, wenn es eine stetige Verbindungslinie zwischen z_0 und z_1 existiert, so beschaffen, daß wenn z diese Verbindungslinie (samt Endpunkten) beschreibt, der Bereich $z - \mathfrak{F}$ nur reguläre Punkte von $\Psi(z)$ bestreicht.

$F(-D)$ ist hierin als ein unteilbares Symbol aufzufassen, als Zeichen der durch $F(z)$ definierten Funktionaloperation, die auf $\Psi(z)$ ausgeübt $\Psi^*(z)$ liefert. (Die Wahl der Bezeichnung wird bald verständlich, vgl. unter Nr. 39.)

Sind C und C_1 irgendwelche Konstanten, dann ist die Anwendung der betrachteten Funktionaloperation offenbar auch auf die Funktion $C\Psi + C_1\Psi_1$ zulässig, und es ist

$$(58)\quad F(-D)(C\Psi(z) + C_1\Psi_1(z)) = C\,F(-D)\Psi(z) + C_1 F(-D)\,\Psi_1(z).$$

38. Satz VI. *Es seien die in der z-Ebene gelegenen abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$ so miteinander verbunden, daß $\mathfrak{A}^* - \mathfrak{J}$ nur innere Punkte von $\mathfrak{A}$ umfaßt.*

a) *Es sei $\mathfrak{A}$ im Regularitätsgebiet von $\Psi(z)$ und $\mathfrak{A}^*$ im Gebiet $\mathfrak{D}$ enthalten, es sei M das Maximum von $|\Psi(z)|$ in $\mathfrak{A}$ und M^* das Maximum von $|\Psi^*(z)|$ in $\mathfrak{A}^*$. Dann gibt es eine von $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ und $F(z)$ abhängige, jedoch von $\Psi(z)$ und $\Psi^*(z)$ unabhängige positive Zahl K, so beschaffen, daß*

$$(59)\qquad M^* \leqq K\,M$$

ist.

b) *Es seien alle Funktionen $\Psi(z)$, $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$, ... in $\mathfrak{A}$ regulär und $\mathfrak{A}^*$ sei in allen Gebieten $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots$ enthalten, ferner soll gleichmäßig in $\mathfrak{A}$*

$$\Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z) + \ldots$$

gelten. Dann gilt gleichmäßig in $\mathfrak{A}^*$

$$\Psi^*(z) = \Psi_1^*(z) + \Psi_2^*(z) + \Psi_3^*(z) + \ldots.$$

Die in der Formulierung von Satz VI auftretenden Bezeichnungen wurden in Nr. 36 und 37 erklärt.

a) Wir haben uns beim Beweis des Satzes V im wesentlichen überlegt, daß man zu jedem in $\mathfrak{D}$ gelegenen abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{A}^*$ einen ganz im Regularitätsbereich von $\Psi(z)$ gelegenen Bereich finden kann, der $\mathfrak{A}^* - \overline{\mathfrak{J}}$ umfaßt; ein solcher ist mit den dortigen Bezeichnungen $\mathfrak{A}^* - \overline{\mathfrak{J}} + \varepsilon\mathfrak{E}$. Dieser Bereich liegt für hinreichend kleines ε, $\varepsilon > 0$, auch in $\mathfrak{A}$. Daher kann $\Psi^*(z)$ in allen Punkten von $\mathfrak{A}^*$ durch das Integral (55) mit der *festen* Integrationslinie dem Rand von $\overline{\mathfrak{J}} + \varepsilon\mathfrak{E}$ entlang so dargestellt werden, daß alle in den Ausdruck (55) eintretenden Werte $z - u$ Punkte von $\mathfrak{A}$ sind. Die Wahl von ε, also der Integrationslinie, ist nur durch die geometrische Konfiguration von $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{J}$ bedingt. Es ist, wenn wir z^* als in $\mathfrak{A}^*$ liegend voraussetzen und die besagte feste Integrationslinie benutzen,

$$|\Psi^*(z^*)| \leqq \frac{M}{2\pi}\oint |f(u)|\,|du| = M \cdot K.$$

b) Es sei das Maximum des Betrages der Funktion

$$\Psi(z) - \Psi_1(z) - \Psi_2(z) - \ldots - \Psi_n(z) \tag{60}$$

im Bereich $\mathfrak{A}$ mit μ_n bezeichnet. Nach Voraussetzung ist

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n = 0. \tag{61}$$

Durch wiederholte Anwendung von (58) erhält man, daß die Funktion (60) mittels $F(z)$ in

$$\Psi^*(z) - \Psi_1^*(z) - \Psi_2^*(z) - \ldots - \Psi_n^*(z)$$

transformiert wird. Aus (59) erhält man — die Konstante K ist bloß von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$ und $F(z)$ abhängig und bleibt bei Einsetzen von (60) an Stelle von Ψ unverändert — daß im Bereich $\mathfrak{A}^*$

$$|\Psi^*(z) - \Psi_1^*(z) - \Psi_2^*(z) - \ldots - \Psi_n^*(z)| \leqq K \mu_n. \tag{62}$$

Aus (61) und (62) folgt die Behauptung.

Den Inhalt der Gleichung (58), den der Aussage a) und den der Aussage b) des Satzes VI pflegt man dadurch auszudrücken, daß man die Funktionaloperation $F(-D)$ „linear" bzw. „beschränkt" bzw. „stetig" nennt. Wir haben unter b) gezeigt, daß aus der Linearität und der Beschränktheit der Funktionaloperation ihre Stetigkeit folgt; dies ist ein geläufiger Schluß. Man könnte den Inhalt des Satzes V beschreiben, indem man die Funktionaloperation $F(-D)$ als „regularitätserhaltend" und „fortsetzbar" bezeichnet. Nach gehöriger Definition der gebrauchten Bezeichnungen kann man übrigens zeigen, daß die betrachteten Funktionaloperationen die einzigen im Gebiete der analytischen Funktionen sind, die die vier Eigenschaften: regularitätserhaltend, fortsetzbar, beschränkt und linear vereinigen[34]).

39. Es sei jetzt z ein solcher Punkt des Gebietes $\mathfrak{D}$, daß nicht bloß $z - \bar{\mathfrak{z}}$, sondern auch die kleinste abgeschlossene Kreisscheibe vom Mittelpunkt z, die $z - \bar{\mathfrak{z}}$ enthält, im Regularitätsbereich von $\Psi(z)$ Platz findet. Den Radius dieser Kreisscheibe haben wir in Nr. 27 mit H bezeichnet. Es ist also z so beschaffen, daß die Entwicklung

$$\Psi(z-u) = \Psi(z) - \frac{\Psi'(z)\,u}{1!} + \frac{\Psi''(z)\,u}{2!} \ldots \tag{63}$$

[34]) Vgl. a. a. O. [2d]). Die betrachtete Klasse von Funktionaloperationen wurde von Pincherle eingeführt und später durch die Eigenschaft charakterisiert, daß sie mit der Derivation vertauschbar ist, vgl. a. a. O. [9b]), S. 42–43. H. Cramér a. a. O. [10]) betrachtet sie in der Gestalt (64). Die Behandlung hier unterscheidet sich von der durch A. Ostrowski (Sitzungsberichte d. Akademie, Berlin (1927), S. 39–44) angedeuteten nur in der Benützung des Indikatordiagramms.

noch in einem Kreise $u \leqq H + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, gleichmäßig konvergiert. Also kann die Integrationslinie von (55) so eng um $\overline{\mathfrak{F}}$ zusammengezogen werden, daß wir die Reihe (63) in (55) einsetzen und gliedweise integrieren können. Wir erhalten, mit Rücksicht auf (18)

$$\Psi^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \Psi(z-u) f(u)\, du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Psi^{(n)}(z)}{n!} \frac{1}{2\pi i}\oint u^n f(u)\, du,$$

$$\Psi^*(z) = a_0 \Psi(z) - \frac{a_1 \Psi'(z)}{1!} + \frac{a_2 \Psi''(z)}{2!} - + \cdots . \tag{64}$$

Man kann, indem man unter D das Symbol der Differentiation versteht, in üblicher Weise festsetzen, daß (64) mit

$$\Psi^*(z) = \left(a_0 - \frac{a_1 D}{1!} + \frac{a_2 D^2}{2!} - + \cdots\right) \Psi(z) \tag{64'}$$

gleichbedeutend sein soll. Die Bezeichnung (57) ist, vgl. (17), durch die Formel (64′) veranlaßt worden.

Die Darstellung (64) ist im allgemeinen, im Gegensatz zu (55), nicht im ganzen Gebiet $\mathfrak{D}$ gültig, sondern nur in einem Teil davon. Es wurde gezeigt: *Die Darstellung* (64′) *ist in solchen Punkten von* $\mathfrak{D}$, *deren Abstand vom nächsten singulären Punkt von* $\Psi(z)$ *mehr als* H *beträgt, sicher gültig.*

40. Wenn man die in den Betrachtungen der Nr. 36 bis 39 aufrecht erhaltene Beschränkung, daß die zu transformierende Funktion $\Psi(z)$ eindeutig ist, fallen läßt, ist einige Vorsicht anzuwenden, um eine Verwechslung der verschiedenen Zweige zu verhüten. Ein Funktionselement der Funktion $\Psi^*(z)$ ist in der Umgebung eines festen Ausgangspunktes z_0 mit Hilfe eines bestimmten Zweiges von $\Psi(z)$ durch die Formel (55) zu definieren. Eine geringfügige Abänderung der Betrachtungen der Nr. 36 ergibt: *Bewegt sich der Punkt* z *vom Punkte* z_0 *ausgehend entlang eines stetigen Weges so, daß der mitbewegte Bereich* $z - \overline{\mathfrak{F}}$ *nicht an singuläre Punkte von* $\Psi(z)$ *anstößt, so ist* $\Psi^*(z)$ *längs des besagten Weges fortsetzbar.* Die unschwierige, aber etwas umständliche Umformulierung des vollen Satzes V (die Beschreibung des Gebietes $\mathfrak{D}$ für ein mehrdeutiges $\Psi(z)$) soll hier erspart und nur der nützlichste Spezialfall ausgesprochen werden:

Es sei das Indikatordiagramm der ganzen Funktion $F_0(z)$ *vom Exponentialtypus der Nullpunkt (der Indikator von* $F_0(z)$ *identisch* $= 0$*), und ihre Borelsche Transformierte sei mit* $f_0(z)$ *bezeichnet. Es sei das Integral*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \Psi(z-u) f_0(u)\, du = \Psi^*(z)$$

im positiven Sinne entlang des Kreises $|u| = \varepsilon > 0$ *erstreckt, wo* ε *so klein ist, daß* $\Psi(z-u)$ *für* $u \leqq \varepsilon$ *regulär bleibt.* $\Psi^*(z)$ *ist eine analytische Funktion von* z *und läßt sich längs jeden Weges, dem entlang* $\Psi(z)$ *fortsetzbar ist, auch fortsetzen, und zwar kehrt* $\Psi^*(z)$ *nach Durchlaufen eines solchen geschlossenen Weges, der die Bestimmung von* $\Psi(z)$ *nicht ändert, auch zur ursprünglichen Bestimmung zurück.*

Kürzer gesagt: $\Psi^*(z)$ *ist auf der Riemannschen Fläche von* $\Psi(z)$ *regulär und eindeutig*[35]).

Beispiele.

41. Zunächst folgen einige ganz spezielle Beispiele.

a) $\Psi(z)$ beliebig,

$$F(z) = C_1 e^{c_1 z} + C_2 e^{c_2 z} + \ldots + C_n e^{c_n z}$$

die unter Nr. 32 erwähnte Funktion. Jetzt ist $\mathfrak{F}$ das kleinste konvexe Polygon, das $c_1, c_2, \ldots, c_n$ umfaßt, und aus (55) wird

$$\Psi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \Psi(z-u) \left(\frac{C_1}{u-c_1} + \ldots + \frac{C_n}{u-c_n} \right) du,$$

wobei die Integrationslinie die Singularitäten von $\Psi(z-u)$ ausschließt und $\mathfrak{F}$, also die Punkte $c_1, c_2, \ldots, c_n$ einschließt. Hieraus folgt

$$\Psi^*(z) = C_1 \Psi(z-c_1) + C_2 \Psi(z-c_2) + \ldots + C_n \Psi(z-c_n);$$

dasselbe ergibt sich auch aus (64). Man verdeutliche sich die Sätze V und VI.

b) $\Psi(z)$ beliebig, $F(z) = z^m$, m positiv ganz. Jetzt ist $\mathfrak{F}$ der Nullpunkt, $f(z) = \frac{m!}{z^{m+1}}$ und

$$\Psi^*(z) = (-1)^m \Psi^{(m)}(z),$$

wie sich sofort aus (64) oder aus (55) ergibt. Sätze V, VI ergeben nur Wohlbekanntes.

c) $F(z)$ beliebig, $\Psi(z) = e^{\lambda z}$, λ konstant. Entweder auf Grund von (55) und (27), oder aus (64) und (17) ergibt sich

$$F(-D)\, e^{-\lambda z} = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{-\lambda(z-u)} f(u)\, du = e^{-\lambda z} \frac{1}{2\pi i} \oint e^{u\lambda} f(u)\, du$$

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n a_n (-\lambda)^n e^{-\lambda z}}{n!} = F(\lambda)\, e^{-\lambda z};$$

[35]) Vgl. H. Cramér a. a. O. [10]) und A. Ostrowski a. a. O. [34]). Durch den ausgesprochenen Satz werden Gebiete bezeichnet, in denen Singularitäten der transformierten Funktion nicht liegen; Punkte, in denen sicher Singularitäten liegen, werden durch Satz 3 a. a. O. [21]) aufgewiesen.

dies ist eine ganze Funktion von z, wie es auch nach Satz V, bei richtiger Auslegung, sein muß. Denn $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^*$ sind, wenn $\Psi(z)$ eine ganze Funktion ist, beide die Nullmenge, also muß $\mathfrak{D}$ die ganze Ebene sein.

d) $F(z)$ beliebig, $\Psi(z) = \frac{1}{z-a}$, a konstant. Es wird aus (55)

$$F(-D)\frac{1}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{z-u-a} f(u)\,du = f(z-a),$$

da die Integrationslinie $\overline{\mathfrak{J}}$ einschließt, $z-a$ ausschließt, und der Integrand für $u=\infty$ wie u^{-2} verschwindet. Dasselbe Ergebnis aus (64). Im vorliegenden Fall besteht $\mathfrak{S}$ aus dem Punkt a, $\mathfrak{S}^*$ aus $a+\overline{\mathfrak{J}}$, und Satz V besagt nur einen Teil von Satz III.

42. *Es sei die in Satz* V *erwähnte Funktion* $\Psi(z)$ *meromorph, ihre Pole sollen in den Punkten* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *liegen und seien sämtlich einfach. Wenn ein Randpunkt* ζ *von* $\mathfrak{D}$ *nur einem der Bereiche* $s_1+\overline{\mathfrak{J}}$, $s_2+\overline{\mathfrak{J}}$, $s_3+\overline{\mathfrak{J}}, \ldots$, *sagen wir* $s_m+\overline{\mathfrak{J}}$ *angehört, und zwar extremer Punkt von* $s_m+\overline{\mathfrak{J}}$ *ist, so ist* ζ *ein singulärer Punkt von* $\Psi(z)$.[36])

Es sei S_m das Residuum von $\Psi(z)$ im Punkte s_m und

$$\Psi(z) = \frac{S_m}{z-s_m} + \Psi_m(z) \tag{65}$$

gesetzt; $\Psi_m(z)$ ist also meromorph, wie $\Psi(z)$, aber regulär im Punkte $z=s_m$. Durch Anwendung der linearen Funktionaloperation $F(-D)$ gehen die beiden Seiten von (65) in

$$\Psi^*(z) = S_m f(z-s_m) + \Psi_m^*(z) \tag{66}$$

über, vgl. unter 41d), für die Bezeichnung $\Psi_m^*(z)$ Nr. 37. Das der Funktion $\Psi(z)$ zugeordnete Gebiet $\mathfrak{D}$ entsteht aus dem der Funktion $\Psi_m(z)$ entsprechend zugeordneten Gebiete $\mathfrak{D}_m$, indem aus $\mathfrak{D}_m$ gewisse Punkte von $s_m+\overline{\mathfrak{J}}$ weggelöscht werden: Zu diesen gehört der Punkt ζ. Von $\mathfrak{D}_m$ ist ζ ein innerer Punkt, und daher ist $\Psi_m^*(z)$ in ζ, gemäß Satz V, regulär; von $s_m+\overline{\mathfrak{J}}$ ist ζ ein extremer Punkt, und daher ist $f(z-s_m)$ in ζ, gemäß Satz III, singulär. Somit ist ζ ein singulärer Punkt der Funktion (66).

43. Ein wichtiges Beispiel zur Nr. 42 wird durch die meromorphe Funktion

---

[36]) Es kann aus Fußnote [29]) gefolgert werden, daß die Behauptung betreffend ζ noch bestehen bleibt, wenn die Voraussetzung betreffend $\Psi(z)$ folgendermaßen erweitert wird: *Es sollen die singulären Punkte* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *der in Satz* V *erwähnten eindeutigen Funktion* $\Psi(z)$ *keinen Häufungspunkt im Endlichen besitzen.* Das heißt, s_n kann auch mehrfacher Pol oder auch wesentliche singuläre Stelle sein.

$$(67)\qquad \Psi(z)=\frac{1}{1-e^{-z}}=1+e^{-z}+e^{-2z}+e^{-3z}+\dots$$
$$=-e^{z}-e^{2z}-e^{3z}-\dots$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-2n\pi i}$$

geliefert. Die Pole liegen in den Punkten $0,\ \pm 2\pi i,\ \pm 4\pi i,\ \dots$. Die Reihe in der ersten Zeile von (67) konvergiert für $\Re z>0$, die in der zweiten für $\Re z<0$. Das Summenzeichen in der letzten Zeile von (67) ist geläufigerweise als $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=-N}^{N}{}'$ auszulegen; dieser Grenzwert existiert, von den Polen abgesehen, überall.

Alle Betrachtungen der Nummern 36 bis 42 können mit Vorteil am Beispiel (67) verdeutlicht werden.

a) Mit den Bezeichnungen von Satz V besteht jetzt $\mathfrak{S}$ aus der Punktreihe

$$\dots,\ -4\pi i,\ -2\pi i,\ 0,\ 2\pi i,\ 4\pi i,\ \dots$$

und $\mathfrak{S}^*$ aus den unendlich vielen kongruenten und gleichgelegenen konvexen Bereichen

$$(68)\qquad \dots,\ -4\pi i+\overline{\mathfrak{J}},\ -2\pi i+\overline{\mathfrak{J}},\ \overline{\mathfrak{J}},\ 2\pi i+\overline{\mathfrak{J}},\ 4\pi i+\overline{\mathfrak{J}},\ \dots.$$

Das der Funktion (67) im Sinne von Satz V zugeordnete zusammenhängende offene Gebiet $\mathfrak{D}$ kann jetzt so gewählt werden, daß es ein unendlich langes Stück der positiven reellen Achse enthält. Wenn $\overline{\mathfrak{J}}$ und $2\pi i+\overline{\mathfrak{J}}$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen, ist $\mathfrak{D}$ die ganze Restfläche, die aus der Ebene nach Ausschneiden der Bereiche $\overline{\mathfrak{J}}$ übrigbleibt; in diesem Falle ist $\mathfrak{D}$ „durchlöchert". Wenn $\overline{\mathfrak{J}}$ und $2\pi i+\overline{\mathfrak{J}}$ einen gemeinsamen Punkt besitzen, ist $\mathfrak{D}$ nur der rechtsliegende Teil der genannten Restfläche, ist einfach zusammenhängend und heißt „undurchlöchert".

Z. B. ist $\mathfrak{D}$ sicherlich durchlöchert, wenn die Breite von $\overline{\mathfrak{J}}$ senkrecht zur reellen Achse, vgl. unter 28 a), kleiner als 2π ist, und $\mathfrak{D}$ kann (muß aber nicht) undurchlöchert sein, wenn diese Breite 2π erreicht.

Die in Satz V genannte Funktion $\Psi^*(z)$ wird in allen Punkten von $\mathfrak{D}$ durch

$$\Psi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(u)\,du}{1-e^{u-z}}$$

dargestellt, sie ist innerhalb $\mathfrak{D}$ regulär und eindeutig (die Eindeutigkeit ist nicht selbstverständlich, wenn $\mathfrak{D}$ durchlöchert ist), die Randpunkte von $\mathfrak{D}$ können singuläre Punkte von $\Psi^*(z)$ sein, und ein solcher Randpunkt, der nur einem der Bereiche (68), und zwar als extremer Punkt angehört, muß auch singulärer Punkt sein, nach Nr. 42.

b) Die konvexen Bereiche (68) haben zwei gemeinsame vertikale Stützgeraden. Man bezeichne mit $\mathfrak{H}^*$ die offene Halbebene, die rechts von der rechtsgelegenen der beiden genannten Stützgeraden liegt. In Zeichen: z gehört dann zu $\mathfrak{H}^*$, wenn $\Re z > h(0)$; $h(\varphi)$ bezeichnet, wie früher, den Indikator von $F(z)$. $\mathfrak{H}^* - \bar{\mathfrak{J}}$ ist ersichtlicherweise die Halbebene, wo $\Re z > 0$. Daher liegt, wenn irgendein abgeschlossener Teilbereich der Halbebene $\mathfrak{H}^*$ mit $\mathfrak{A}^*$ bezeichnet wird, $\mathfrak{A}^* - \bar{\mathfrak{J}}$ ganz im Innern eines passend gewählten abgeschlossenen Teilbereiches $\mathfrak{A}$ der Halbebene $\Re z > 0$.

Diese Situation, der Satz VI b, die erste Zeile von (67) und Nr. 41 c) ergeben: *Es gilt für* $\Re z > h(0)$ *die Darstellung*

$$(69) \qquad \Psi^*(z) = F(0) + F(1)e^{-z} + F(2)e^{-2z} + \ldots + F(n)e^{-nz} + \ldots,$$

und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich der Halbebene $\Re z > h(0)$.

Wir wollen untersuchen, ob die Reihe (69) über die Halbebene $\Re z > 0$ hinaus konvergieren kann, d. h. ob die Funktion $\Psi^*(z)$ an der Begrenzung dieser Halbebene einen singulären Punkt hat. Die vertikale Gerade $\Re z = h(0)$ hat mit dem konvexen Bereich $\bar{\mathfrak{J}}$ entweder einen Punkt gemeinsam, der dann extremer Punkt von $\bar{\mathfrak{J}}$ ist, oder eine Strecke, deren beide Endpunkte extreme Punkte von $\bar{\mathfrak{J}}$ sind. Diese extremen Punkte sind, wie schon unter a) bemerkt, singuläre Punkte von $\Psi^*(z)$, abgesehen vom Fall, daß sie mit Punkten eines Bereiches $2n\pi i + \bar{\mathfrak{J}}$ zusammenfallen, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$; in letzterem Fall muß jedoch die Länge der vertikalen Strecke, die $\bar{\mathfrak{J}}$ und $\Re z = h(0)$ gemeinsam ist, $\geqq 2\pi$ sein. Die geläufige Berechnung des Konvergenzradius, angewendet auf (69) und konfrontiert mit der Definition von $h(0)$, ergibt: *Abgesehen vom Falle, daß das Indikatordiagramm von* $F(z)$ *von rechts durch eine vertikale gerade Strecke begrenzt ist, deren Länge* $\geqq 2\pi$ *ist, gilt*

$$(70) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} n^{-1} \log |F(n)| = \overline{\lim_{r \to \infty}} r^{-1} \log |F(r)|,$$

wo n *die ganzen Zahlen* $1, 2, 3, \ldots$ *und* r *alle positiven Zahlen durchlaufend gegen* $+\infty$ *strebt.*

Wenn also die Begrenzung des Indikatordiagramms von $F(z)$ keine Strecke der beschriebenen Art enthält, kann $F(z)$ insbesondere nicht für alle positiven ganzzahligen Werte verschwinden, ohne identisch zu verschwinden; im Falle, daß $F(n) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, wäre nämlich die linke Seite von (70) sinngemäß als $-\infty$ zu lesen, während die rechte Seite $h(0)$ ist und endlich sein muß, falls das Indikatordiagramm nicht die leere Menge ist. Anderseits ist eine Strecke der beschriebenen Art sicher nicht vorhanden, wenn die Breite des Indikatordiagramms senkrecht zur reellen Achse $< 2\pi$ ist, und daher gilt: *Wenn* $F(z)$ *nicht identisch*

verschwindet und ihr Indikator der Bedingung $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)+h\left(\frac{\pi}{2}\right)<2\pi$ *genügt, können die Werte* $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, ... *nicht sämtlich* $=0$ *sein*[37]).

Daß hierin nicht $\leqq 2\pi$ anstatt $<2\pi$ gesagt werden kann, zeigt die Funktion $F(z)=\sin \pi z$, deren Indikatordiagramm die Verbindungsstrecke der Punkte $-\pi i$ und $+\pi i$ ist, vgl. Nr. 32.

c) Eine ähnliche geometrische Überlegung, wie die unter b), der Satz VI b), die zweite Zeile von (67) und Nr. 41 c) zeigen: Es gilt für $\Re z<h(\pi)$ die Darstellung

$$\Psi^*(z)=-F(-1)\,e^{z}-F(-2)\,e^{2z}-F(-3)\,e^{3z}-\ldots,$$

falls $\mathfrak{D}$ die Halbebene $\Re z<h(\pi)$ überhaupt enthält, d. h. falls $\mathfrak{D}$ durchlöchert ist.

d) $\mathfrak{D}-\overline{\mathfrak{H}}$ enthält keinen Pol von (67), vgl. den Beweis von Satz V, ist also im Regularitätsgebiet von (67) enthalten. Diese Situation, Satz VI b), die dritte Zeile von (67) und Nr. 41 d) ergeben: Es gilt im ganzen Gebiete $\mathfrak{D}$ die Darstellung

$$\Psi^*(z)=\frac{1}{2}F(0)+\sum_{-\infty}^{+\infty}f(z-2n\pi i),$$

wobei das Summenzeichen ebenso aufzufassen ist, wie in der dritten Zeile von (67).

Diese Darstellung setzt sowohl die auf dem Rand von $\mathfrak{D}$ gelegenen singulären Punkte von $\Psi^*(z)$ wie auch die Tatsache in Evidenz, daß $\Psi^*(z)$ die Periode $2\pi i$ hat.

e) Man schneide jetzt aus der z-Ebene die Kreisscheiben heraus, deren Mittelpunkte die Pole von (67) sind und deren gemeinsamer Radius H ist. In dem übrigbleibenden Teil des Gebietes $\mathfrak{D}$ gilt, nach Nr. 39, die Darstellung

$$(71)\qquad \Psi^*(z)=a_0\frac{1}{1-e^{-z}}-\frac{a_1}{1!}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-e^{-z}}\right)+\frac{a_2}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-e^{-z}}\right)-+\ldots.$$

---

[37]) Dieser Satz ist enthalten in einem allgemeineren von F. Carlson, a. a. O. [8a]), S. 58, und einem noch allgemeineren von R. Nevanlinna, Comptes Rendus Paris **174** (1922), p. 1325–1327. (70) ist aber in diesen Arbeiten nicht enthalten, wie auch der folgende einfachere Satz nicht: Wenn eine ganze Funktion $g(z)$ einer Ungleichung von der Form $|g(z)|<|z|^a e^{\pi|z|}$ für genügend großes $|z|$ genügt (a positive Konstante) und für $z=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ verschwindet, so ist sie $\equiv P(z)\sin \pi z$, wo $P(z)$ ein Polynom ist. Letzterer wurde a. a. O. [2a]), S. 299 ausgesprochen und später von G. Valiron wiedergefunden und mit Beweis publiziert in Bulletin des Sciences Math. (2) **49** (1925), p. 181–192 und 203–224; vgl. das Théorème fondamental p. 204.

Wenn z nicht auf einer der horizontalen Geraden $\Im z = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ gelegen ist, liegt auf dem Konvergenzkreis der Taylorschen Entwicklung von (67) um das Zentrum z nur ein Pol von (67). Hieraus folgt bekanntlich leicht, daß

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{1-e^{-z}}\right)\right|}$$

(nicht bloß lim) existiert und gleich der reziproken Entfernung des Punktes z vom nächsten Pol ist. Auf Grund hiervon und von (20) ist es leicht, die Konvergenz von (71) direkt zu diskutieren. Außerhalb der Kreisscheiben $|z - 2n\pi i| \leqq H$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, konvergiert (71) wie eine geometrische Reihe; in einem innern Punkt von einer dieser Kreisscheiben kann es nur dann konvergieren, wenn der Punkt auf einer der Geraden $\Im z = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ liegt. Die Darstellung (71) gilt also, abgesehen vom Falle, daß das Indikatordiagramm $\mathfrak{J}$ ein Kreis vom Mittelpunkte $z = 0$ ist, nur in einem echten Teilgebiet von $\mathfrak{D}$, im Gegensatz zu den überall in $\mathfrak{D}$ gültigen Darstellungen unter a) und d).

In der Literatur wurde die hier diskutierte Funktion $\Psi^*(z)$ häufig behandelt, nur pflegt man von der Potenzreihe (72) auszugehen, in welche sich die unter b) gegebene Darstellung beim Übergang von e^{-z} zu z verwandelt [38]).

f) Der hier gegebenen Darstellung sind noch weitere Zusätze mühelos zu entnehmen, wie z. B. der folgende:

Wenn der Indikator $h(\varphi)$ der ganzen Funktion $F(z)$ den Ungleichungen

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) < \pi, \qquad h\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \pi$$

genügt, besitzen die beiden durch die Reihen

$$\sum_0^\infty F(a+n)\,e^{-nz} \qquad \text{und} \qquad \sum_0^\infty F(b+n)\,e^{-nz}$$

definierten Funktionen bei Fortsetzung innerhalb des Horizontalstreifens $-\pi \leqq \Im z \leqq \pi$ dieselben singulären Punkte. (a, b sind zwei beliebig gegebene Konstanten.)

Dieser Satz geht aus der Diskussion unter a) nicht völlig hervor, selbst wenn wir beachten, daß $F(a+z)$ und $F(b+z)$ dasselbe Indikatordiagramm besitzen wie $F(z)$, vgl. unter 29b). Beachtet man hingegen,

[38]) Vgl. a. a. O. [8]). Der wesentlichste Vorteil der vorliegenden Behandlung scheint mir zu sein, daß sie nicht nur angibt, wo die singulären Punkte liegen können, sondern auch, wo sie liegen müssen, nämlich in den besagten extremen Punkten der Bereiche (68). Vgl. hierzu Carlson, a. a. O. [8a]), S. 54—55.

daß für $\Re z > h(0)$

$$F(-D)\,\frac{e^{-az}-e^{-bz}}{1-e^{-z}} = e^{-az}\sum_{n=0}^{\infty}{}' F(a+n)\,e^{-nz} - e^{-bz}\sum_{n=0}^{\infty}{}' F(b+n)\,e^{-nz}$$

gilt, vgl. unter b), und daß die Funktion, worauf hier die Funktionaloperation $F(-D)$ ausgeübt wurde, für $z=0$ regulär ist (sie kann für $z = \pm 2\pi i,\ \pm 4\pi i, \ldots$ Pole besitzen), so ergibt sich die ausgesprochene Behauptung aus Satz V, mit Rücksicht auf die unter a) besprochene geometrische Situation der Bereiche (68).

44. Wir wollen jetzt die durch die Potenzreihe

$$F(0) + F(1)z + F(2)z^2 + \ldots + F(n)z^n + \ldots = \Phi(z) \tag{72}$$

definierte Funktion betrachten. Gemäß 43b) ist

$$\Phi(z) = \Psi^*(-\log z).$$

Wenn $\mathfrak{D}$ durchlöchert ist, läßt sich, gemäß 43c), $\Phi(z)$ auf einem gewissen Weg in den Punkt $z=\infty$ hinein fortsetzen und dort folgendermaßen entwickeln:

$$\Phi(z) = -\frac{F(-1)}{z} - \frac{F(-2)}{z^2} - \frac{F(-3)}{z^3} - \ldots . \tag{73}$$

Wenn die Breite des Indikatordiagramms $\mathfrak{J}$ von $F(z)$ senkrecht zur reellen Achse $< 2\pi$ ist, läßt sich $\Phi(z)$ in $z=\infty$ sogar geradlinig, nämlich entlang eines vom Nullpunkt auslaufenden Halbstrahls fortsetzen. Und so lassen sich alle Resultate der Nr. 43 auf (72) übertragen, nur büßen sie bei der Übertragung viel von ihrer Übersichtlichkeit ein. Verhältnismäßig einfach wird die Übertragung, wenn $\mathfrak{J}$, das konjugierte Diagramm von $F(z)$, ein der imaginären oder der reellen Achse paralleles Geradenstück ist, das bei Abbildung durch die Exponentialfunktion in einen Kreisbogen bzw. in ein Geradenstück übergeht (der Mittelpunkt liegt im, bzw. die Verlängerung geht durch den Nullpunkt). Gemäß 43a) sind die beiden Endpunkte dieses Kreisbogens (bzw. Geradenstückes) singuläre Punkte für die durch (72) definierte Funktion $\Phi(z)$, die im Außenraum des Kreisbogens (bzw. des Geradenstückes) regulär und eindeutig bleibt.

45. Wir greifen jetzt zurück auf den Satz IX der Nr. 11, konstruieren mit der dort auftretenden Zahlenfolge $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die in Nr. 14 behandelte und in Nr. 33 weiterbehandelte ganze Funktion $F(z)$. Diese hat, nach Nr. 33, ein achsenparalleles Geradenstück zum Indikatordiagramm, woraus, nach der Schlußbemerkung der Nr. 44, die analytische Fortsetzung der Reihe (72) sich ergibt. Vereinigen wir, was wir über dieses Beispiel in den Nrn. 11, 14, 33 und 44 gelernt haben, in dem für das Folgende wichtigen

Hilfssatz A. *Die unendliche Folge* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ *soll die Eigenschaften*

$$\lambda_1 \geqq 0, \qquad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq p > 0 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

besitzen und die Maximaldichte Δ *haben:* $0 \leqq \Delta \leqq p^{-1}$. *Die Intervalle* λ_n, λ_{n+1} *seien eingeteilt in Intervalle erster Art und Intervalle zweiter Art.*

Dann gibt es eine ganze Funktion $F(z)$ *vom Exponentialtypus mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Werte* $F(\lambda_1), F(\lambda_2), \ldots, F(\lambda_n), \ldots$ *sind reell,* $F(\lambda_1) \geqq 0$, *und* $(-1)^\nu F(\lambda_n) F(\lambda_{n+1}) > 0$, *wenn das Intervall* λ_n, λ_{n+1} *von der* ν*-ten Art ist* ($\nu = 1$ *oder* 2).

2. *Es ist*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sqrt[\lambda_n]{F(\lambda_n)} \right| = 1 .$$

3. *Das Indikatordiagramm von* $F(z)$ *besteht aus der geraden Verbindungsstrecke der Punkte* $-\pi\Delta i$ *und* $\pi\Delta i$.

4. *Wenn* $\Delta < 1$ *ist, stellt die Reihe*

$$\Phi(z) = F(0) + F(1)z + F(2)z^2 + \ldots + F(n)z^n + \ldots$$

eine Funktion dar, die außerhalb des am Einheitskreise gelegenen Bogens $|z| = 1$, $-\pi\Delta \leqq \arc z \leqq \pi\Delta$ *überall, auch für* $z = \infty$ *regulär ist und im Punkt* $z = \infty$ *verschwindet. Die beiden Endpunkte des Bogens,* $e^{-\pi\Delta i}$ *und* $e^{\pi\Delta i}$, *sind singuläre Punkte von* $\Phi(z)$.

Wenn $\Delta = 0$ ist, besteht das Indikatordiagramm aus dem Punkte $z = 0$, die beiden Endpunkte des unter 4. erwähnten Bogens fallen in den einzigen singulären Punkt $z = 1$ von $\Phi(z)$ zusammen, und $\Phi(z)$ ist eine ganze Funktion von $(z-1)^{-1}$. Was Hilfssatz A über den Spezialfall $\Delta = 0$ aussagt, war wohlbekannt[39]) und ist leicht direkt zu begründen.

Drittes Kapitel.

Über ganze Funktionen mit Lückenreihen.

Ordnung und Typus. Terminologie und Hilfssätze.

46. Es sei

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{1}$$

eine ganze Funktion und $\mathfrak{U}$ eine in der z-Ebene gelegene abgeschlossene unbeschränkte Punktmenge, d. h. eine solche, die $z = \infty$ zum Häufungs-

[39]) G. Faber, Sitzungsberichte München **34** (1904), S. 63–74. Vgl. auch Hadamard, a. a. O. [1]), S. 70–72.

punkt hat und, außer $z = \infty$, ihre sämtlichen Häufungspunkte enthält. Unter $M(r; \mathfrak{U})$ (ausführlicher sollte $M(r; \mathfrak{U}; G)$ geschrieben werden) verstehe ich das Maximum von $|G(z)|$, wenn z diejenigen an der Kreislinie $|z| = r$ gelegenen Punkte durchläuft, die zu $\mathfrak{U}$ gehören. Wenn kein Punkt von $\mathfrak{U}$ auf der Kreislinie $|z| = r$ liegt, sei $M(r; \mathfrak{U}) = 0$ gesetzt.

Unter der *Ordnung von* $G(z)$ *in* $\mathfrak{U}$ versteht man

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log\log(M(r;\mathfrak{U})+e)}{\log r}. \tag{2}$$

Die Definition ist so getroffen, daß die Ordnung entweder $= 0$ oder eine positive Zahl oder $= \infty$ ist. Z. B. wenn $G(z)$ in $\mathfrak{U}$ beschränkt bleibt, ist $G(z)$ in $\mathfrak{U}$ von der Ordnung 0.

Wenn es reelle Zahlen $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{m-1}$ gibt, so beschaffen, daß der Grenzwert

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\{r^{-\varrho}(\log r)^{-\varrho_1}(\log_2 r)^{-\varrho_2}\ldots(\log_{m-1} r)^{-\varrho_{m-1}}\log(M(r;\mathfrak{U})+e)\}}{\log_{m+1} r} \tag{3}$$

endlich und ϱ_m ausfällt, so heißt $G(z)$ von der *Lindelöfschen Ordnung* $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$ in $\mathfrak{U}$. Die Definition ist so getroffen, daß die erste nichtverschwindende unter den Zahlen $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ positiv sein muß; in dieser Arbeit wird nur der Fall $\varrho > 0$ betrachtet. Von zwei Ordnungen $(\varrho, \varrho_1, \ldots, \varrho_m)$ und $(\varrho', \varrho_1', \ldots, \varrho_m')$ heißt die erste die *höhere*, entweder wenn $\varrho > \varrho'$ ist, oder wenn $\varrho = \varrho', \varrho_1 = \varrho_1', \ldots, \varrho_{k-1} = \varrho_{k-1}'$ und $\varrho_k > \varrho_k'$ ist $(1 \leqq k \leqq m)$.

Es seien $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ reelle Zahlen, $\varrho > 0$, und es sei

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\varrho}(\log r)^{-\varrho_1}(\log_2 r)^{-\varrho_2}\ldots(\log_m r)^{-\varrho_m}\log M(r;\mathfrak{U}) = h(\mathfrak{U}) \tag{4}$$

gesetzt; $h(\mathfrak{U})$ kann $= -\infty$ oder irgendeine reelle Zahl oder $+\infty$ sein. Es wird der Wert $h(\mathfrak{U})$ in dieser Arbeit als der Typus von $G(z)$ in $\mathfrak{U}$ in bezug auf die Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$ bezeichnet.

(Den Anschluß an den üblichen Sprachgebrauch vermittelt der in der folgenden Nr. 47 näher zu besprechende Fall, in dem $\mathfrak{U}$ die volle Ebene ist.) Selbstverständlich wird dieser lange Ausdruck gelegentlich, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, gekürzt, z. B. wird an Stelle „Typus in bezug auf die Ordnung $(\varrho, 0, 0, \ldots, 0)$“ kürzer „Typus der Ordnung ϱ“ gesagt.

Die Punktmenge $\mathfrak{U}$ wird im folgenden häufig als ein vom Nullpunkt $z = 0$ auslaufender Halbstrahl angenommen oder als der Zwischenraum zweier solcher Halbstrahlen, d. h. ein abgeschlossener Winkelraum, dessen Scheitel im Nullpunkt liegt. Wenn in diesem Kapitel kurz vom „Halbstrahl“ oder vom „Winkelraum“ gesprochen wird, ist das stets so zu verstehen, daß der Anfangspunkt bzw. der Scheitel der Nullpunkt ist.

Wenn die Punktmenge $\mathfrak{U}$ in der Punktmenge $\mathfrak{U}^*$ enthalten ist, so ist offenbar $M(r;\mathfrak{U}) \leqq M(r;\mathfrak{U}^*)$: Im Übergang von einer Punktmenge $\mathfrak{U}$ zu einer umfassenderen $\mathfrak{U}^*$, die $\mathfrak{U}$ als Teilmenge enthält, können Ordnung und Typus nicht niedriger werden. Z. B. ist die Ordnung in einem Winkelraum nie kleiner als in irgendeinem darin liegenden Halbstrahl usw.

47. Wenn $\mathfrak{U}$ möglichst groß, nämlich die volle Ebene ist, wird die explizite Bezugnahme auf $\mathfrak{U}$ gelegentlich unterdrückt. Es wird statt $M(r;$ volle Ebene$)$ kurz $M(r)$ geschrieben (diese übliche Bezeichnung wurde schon in Nr. 20 usw. gebraucht). Wenn schlechthin von *der* Ordnung (von *der* Lindelöfschen Ordnung, *dem* Typus) ohne nähere Qualifikation gesprochen wird, ist stets die Ordnung (usw.) in der vollen Ebene zu verstehen.

$M(r)$ ist bekanntlich stets zunehmend und daher kann *der* Typus nie negativ ausfallen. Je nachdem der Typus (in der vollen Ebene) $= 0$ oder > 0 und endlich, oder $= \infty$ ist, spricht man üblicherweise vom Minimaltypus bzw. vom Normaltypus bzw. vom Maximaltypus der betreffenden Ordnung.

Die Ordnung, die Lindelöfsche Ordnung und der Typus von $G(z)$ lassen sich bekanntlich [40]) aus den Beträgen der Koeffizienten der Reihenentwicklung von $G(z)$ bestimmen. Die Ordnung ϱ der ganzen Funktion (1) ist durch

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|a_n|}{n\log n} = -\frac{1}{\varrho} \tag{5}$$

gegeben. In bezug auf die Lindelöfsche Ordnung $(\varrho, 0, 0, \ldots, 0)$ ist der Typus von (1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\varrho e} |a_n|^{\frac{\varrho}{n}}.$$

(Dies wurde im Spezialfall $\varrho = 1$ unter Nr. 20 – in anderer Bezeichnung – bewiesen.) Es ist nicht nötig die analogen Formeln in voller Allgemeinheit hier anzuschreiben, es genügt eine aus ihnen folgende Eigenschaft zu erwähnen:

Hilfssatz 1. *Wenn die Zahlenfolge* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ *der Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügt und (1) *eine ganze Funktion darstellt, so stellt*

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \ldots + a_n b_n z^n + \ldots$$

[40]) E. Lindelöf, a. a. O. [23]).

ebenfalls eine ganze Funktion dar und zwar eine solche, die in Ordnung, Lindelöfscher Ordnung und Typus mit (1) *übereinstimmt.*

48. Es sei $G(z)$ eine ganze Funktion von der Lindelöfschen Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$. Ihr (auf diese Ordnung bezüglicher) Typus auf dem Halbstrahl von Richtung φ ist eine Funktion des Winkels φ und soll mit $h(\varphi)$ bezeichnet werden. Die gegebene Definition soll so gefaßt werden:

$$(6) \quad h(\varphi) = \lim_{r \to \infty} r^{-\varrho} (\log r)^{-\varrho_1} (\log_2 r)^{-\varrho_2} \ldots (\log_m r)^{-\varrho_m} \log |G(re^{i\varphi})|.$$

Für den Fall $\varrho = 1$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_m = 0$ wurde $h(\varphi)$ unter dem Namen Indikator schon im Kapitel II betrachtet. Die dort entwickelten Sätze sind nur Spezialfälle allgemeinerer Sätze von Phragmén und Lindelöf [41]). An Stelle der dortigen Ungleichung (50) haben wir im allgemeinen Falle einer ganzen Funktion $G(z)$ vom *Normaltypus* der Lindelöfschen Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \ldots, \varrho_m)$ (mit $\varrho > 0$) die Ungleichung

$$(7) \quad h(\varphi_1) \sin \varrho (\varphi_3 - \varphi_2) + h(\varphi_2) \sin \varrho (\varphi_1 - \varphi_3) + h(\varphi_3) \sin \varrho (\varphi_2 - \varphi_1) \geqq 0$$

$$\text{für} \quad \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\varrho},$$

und hieraus folgt die Stetigkeit von $h(\varphi)$. Auch der dortige Satz IV bleibt im vorliegenden allgemeineren Fall (sinngemäß verändert) gültig und folglich lassen sich auch die Betrachtungen der Nr. 26 übertragen. Vereinigt man diese mit einer Bemerkung der Nr. 34, so gelangt man zum folgenden

Satz I. *Es sei $G(z)$ eine ganze Funktion vom Normaltypus der Lindelöfschen Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$, $\varrho > 0$. In jedem abgeschlossenen Winkelraum liegt mindestens ein Halbstrahl, dem entlang $G(z)$ von demselben Typus ist, wie in dem ganzen Winkelraum. Die Gesamtheit dieser Halbstrahlen bildet eine abgeschlossene Menge. Und zwar existieren, mindestens im Falle der Lindelöfschen Ordnung $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, Funktionen $G(z)$, zu welchen in diesem Sinne eine beliebig vorgeschriebene nicht leere abgeschlossene Menge von Halbstrahlen gehört.*

49. Betrachten wir jetzt die Ordnung einer beliebigen ganzen Funktion $G(z)$ entlang eines Halbstrahles als Funktion der Richtung φ des Halbstrahls. Diese Funktion ist im allgemeinen nicht stetig. Z. B. hat $\sin z$ auf allen Halbstrahlen bis auf die beiden $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ die Ordnung 1 und auf den beiden Ausnahmehalbstrahlen (positive und negative reelle Achse) die Ordnung 0. Ein anderes Beispiel wird von der ganzen Funktion unendlicher Ordnung [42])

[41]) Vgl. a. a. O. [6]).

[42]) E. Lindelöf, a. a. O. [8]), S. 121.

$$(8) \qquad 1+\frac{z}{\log 3}+\left(\frac{z}{\log 4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z}{\log(n+2)}\right)^n+\cdots$$

geliefert, die in jedem Winkelraume $\varepsilon \leqq \arc z \leqq 2\pi-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ gleichmäßig gegen Null strebt. Die Ordnung der Funktion (8) ist $=0$ auf jedem Halbstrahl, ausgenommen die positive reelle Achse, auf der sie $=\infty$ ist.

An Stelle des Satzes I tritt daher jetzt ein komplizierterer, der hier, wegen einiger Bequemlichkeit, bloß für den Fall des Winkels von Öffnung 2π, d. h. der vollen Ebene formuliert werden soll.

Satz I'. *Zu jeder ganzen Funktion $G(z)$ gehört mindestens ein Halbstrahl von der Eigenschaft, daß $G(z)$ in jedem von dem betreffenden Halbstrahl halbierten Winkelraum von derselben Ordnung ist, wie in der vollen Ebene. Die Gesamtheit der Halbstrahlen von der besagten Eigenschaft bildet eine abgeschlossene Menge. Und zwar existieren, mindestens im Falle der Ordnung ∞, Funktionen $G(z)$, zu welchen in diesem Sinne eine beliebig vorgeschriebene nicht leere abgeschlossene Menge von Halbstrahlen gehört.*

Man könnte sich so ausdrücken, daß Satz I', ebenso wie Satz I, von den „Richtungen des stärksten Anwachsens" handelt. Aber es sind mehrere Unterschiede zu beachten: Satz I' bezieht sich auf alle ganze Funktionen, Satz I bloß auf solche vom Normaltypus. In Satz I' wird das „Anwachsen" durch die Ordnung, in Satz I durch den Typus gemessen. Die gröbere Messung durch die Ordnung kann unstetige Resultate liefern, wo die feinere, aber seltener ausführbare Messung durch den Typus stetige liefert. Die Verschiedenheit in den Stetigkeitsverhältnissen bedingt, daß die „Richtungen stärksten Anwachsens" in Satz I' und Satz I auf andere Art definiert sind.

Fassen wir zunächst die erste Behauptung des Satzes I' ins Auge, die die Existenz der Halbstrahlen „stärksten Anwachsens" besagt. Die ganze Funktion $G(z)$ sei von der Ordnung ϱ (in der vollen Ebene), $0 \leqq \varrho \leqq \infty$. Es sei die Ebene durch eine durch den Nullpunkt gehende Gerade in zwei Halbebenen geteilt. In mindestens einer der beiden abgeschlossenen gedachten Halbebenen muß $G(z)$ ersichtlicherweise von der Ordnung ϱ sein; sonst wäre nämlich die Ordnung von $G(z)$ auch in der vollen Ebene $<\varrho$. In der Halbebene, worin $G(z)$ wieder die Ordnung ϱ erreicht, gibt es nach derselben Überlegung eine Viertelebene, worin $G(z)$ wieder die Ordnung ϱ erreicht, in dieser wieder eine Achtelebene usw. Wir erhalten durch sukzessive Halbierung eine Folge ineinander geschachtelter Winkelräume, und der Halbstrahl, der zu allen diesen Winkelräumen gehört, besitzt offenbar die in Satz I formulierte Eigenschaft.

Die nächste Behauptung des Satzes I betrifft die Abgeschlossenheit. Ist $\mathfrak{S}$ ein Halbstrahl, $\mathfrak{W}$ ein durch $\mathfrak{S}$ halbierter Winkelraum und $\mathfrak{S}_1$ ein im Innern von $\mathfrak{W}$ liegender Halbstrahl, der der im Satz I′ genannten Eigenschaft teilhaftig ist, so grenze man einen so kleinen von $\mathfrak{S}_1$ halbierten Winkelraum $\mathfrak{W}_1$ ab, daß $\mathfrak{W}_1$ ganz in $\mathfrak{W}$ liegt. Nun erreicht die Funktion $G(z)$ in $\mathfrak{W}_1$ und somit auch in dem umfassenderen $\mathfrak{W}$ die Ordnung ϱ, die sie in der vollen Ebene besitzt. Enthält jeder durch $\mathfrak{S}$ halbierte Winkelraum $\mathfrak{W}$ einen Halbstrahl von der Art von $\mathfrak{S}_1$, so ist in jedem solchen $\mathfrak{W}$ die Funktion $G(z)$ von der Ordnung ϱ. Hiermit ist auch die zweite Behauptung von Satz I bewiesen.

Die dritte und letzte Behauptung von Satz I ist durch sinngemäße Übertragung der in Nr. 34 dargestellten Konstruktion zu beweisen. Es sei $\mathfrak{M}$ eine nicht leere, abgeschlossene, sonst beliebige Menge von Richtungen. Es gibt bekanntlich eine in $\mathfrak{M}$ enthaltene abzählbare Untermenge $\mathfrak{Z}$, so daß $\mathfrak{M}$ die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{Z}$ und der Ableitung von $\mathfrak{Z}$ ist. Es seien $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ die zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Richtungen (ψ_n bezeichnet den Winkel der betreffenden Richtung mit der positiven reellen Achse). Unter $E(z)$ die in (8) angegebene Funktion verstanden, setze man

$$(9) \quad G(z) = E(ze^{-i\psi_0}) + 2^{-1}E(ze^{-i\psi_1}) + \ldots + 2^{-n}E(ze^{-i\psi_n}) + \ldots .$$

Es ist unmittelbar zu sehen, daß $G(z)$ in einem zur offenen Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ gehörigen abgeschlossenen Winkelraum zu 0 strebt und längs eines zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Halbstrahls von unendlicher Ordnung ist. Alle Halbstrahlen von $\mathfrak{M}$ und nur diese Halbstrahlen sind so beschaffen, daß $G(z)$ in jedem durch den Halbstrahl halbierten Winkel von Ordnung ∞ ist.

Die Analogie zwischen den singulären Punkten auf dem Konvergenzkreis und den Juliaschen Richtungen der ganzen Funktionen unendlicher Ordnung.

50. Es soll im folgenden das Anwachsen von ganzen Funktionen längs der Halbstrahlen untersucht werden, die von dem Nullpunkt auslaufen, und in Winkelräumen, die von zwei solchen Halbstrahlen eingeschlossen werden. Die zu gewinnenden Sätze werden immer in doppelter Weise anwendbar sein, indem sie für zwei spezielle Klassen von ganzen Funktionen eine besondere Interpretation gestatten.

Einerseits können nämlich, nach Borel, die Singularitäten auf dem Konvergenzkreis einer Potenzreihe mit den Richtungen stärksten Anwachsens einer gewissen ganzen Funktion vom Normaltypus der Ordnung 1 in Beziehung gesetzt werden. Was wir im folgenden brauchen, wurde schon in Nr. 27 bewiesen und soll jetzt in anderer, hier bequemerer Terminologie so gefaßt werden:

Hilfssatz 2. *Es sei*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine ganze Funktion vom Normaltypus der Ordnung 1. *Der Typus von* $G(z)$ *auf einem vom Nullpunkt auslaufenden Halbstrahl erreicht dann und nur dann den Typus von* $G(z)$ *in der vollen Ebene, wenn der Halbstrahl den Konvergenzkreis der Reihe*

$$a_0 + 1!\, a_1 z + 2!\, a_2 z^2 + \ldots + n!\, a_n z^n + \ldots$$

in einem singulären Punkte schneidet.

Andererseits können, nach Bieberbach[43], gewisse Präzisierungen des Picardschen Satzes mit der Ordnung in einem Winkelraum in Beziehung gesetzt werden. Was wir im folgenden brauchen, kann schon aus einem kleinen Teil der Resultate von Bieberbach herausgelesen und so gefaßt werden:

Hilfssatz 3. *Es sei* $G(z)$ *eine ganze Funktion unendlicher Ordnung. Wenn die Ordnung von* $G(z)$ *in beliebig kleinen Winkelräumen, die von einem bestimmten Halbstrahl* $\mathfrak{S}$ *halbiert werden, die Ordnung von* $G(z)$ *in der vollen Ebene (also* ∞*) erreicht, so ist die Richtung des besagten Halbstrahls* $\mathfrak{S}$ *eine Juliasche Richtung von* $G(z)$.

Die beiden Hilfssätze unterscheiden sich, bei sonst starker Analogie, in zwei Hinsichten. Erstens gibt Hilfssatz 2 eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten eines singulären Punktes auf dem Konvergenzrand, während Hilfssatz 3 nur eine hinreichende, keineswegs notwendige Bedingung für das Auftreten Juliascher Richtungen liefert. (Vgl. die Definition dieser Richtungen in der Einleitung, unter Nr. 4.) Zweitens ist in Hilfssatz 2 von dem Typus auf dem Halbstrahl, in Hilfssatz 3 von der Ordnung in den von dem Halbstrahl halbierten beliebig kleinen Winkelräumen die Rede. Dieser Unterschied ist uns nicht neu: Wir sind ihm eben bei Vergleich der Sätze I und I′ begegnet.

51. Wir wollen jetzt denjenigen Spezialfall von Satz I, der die Ordnung $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ und die volle Ebene betrifft, gemäß dem Hilfssatz 2 interpretieren. Das Resultat, das sich ergibt, ist zwar keineswegs überraschend, soll aber zur Erläuterung der Schlußweise formuliert werden.

Satz Ia. *Auf dem Konvergenzkreis jeder Potenzreihe existiert mindestens ein singulärer Punkt. Die Gesamtheit der singulären Punkte auf dem Konvergenzkreis ist abgeschlossen. Jede nicht leere abgeschlossene Menge auf einer Kreisperipherie kann als die Menge der singulären*

[43] L. Bieberbach, Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 175—190.

Punkte auf dem Konvergenzkreis von einer geeigneten Potenzreihe aufgefaßt werden.

Wenn wir den die Ordnung ∞ betreffenden Spezialfall von Satz I′ gemäß Hilfssatz 3 interpretieren, ergibt sich sofort die erste Aussage des folgenden Satzes:

Satz Ib. *Jede ganze Funktion unendlicher Ordnung besitzt mindestens eine Juliasche Richtung. Die Gesamtheit der Juliaschen Richtungen ist abgeschlossen. Jede nicht leere abgeschlossene Menge von Richtungen kann als die Menge der Juliaschen Richtungen von einer geeigneten ganzen Funktion unendlicher Ordnung aufgefaßt werden.*

Die zweite Aussage des Satzes Ib, betreffend die Abgeschlossenheit der Gesamtheit der Juliaschen Richtungen, kann nicht aus Hilfssatz 3 gefolgert werden, da dieser nur eine hinreichende, keine notwendige Bedingung für das Auftreten solcher Richtungen enthält. Diese Abgeschlossenheit ist aber unmittelbar aus den Definitionen zu schließen; der Beweis des zweiten Teiles von Satz I kann dabei als Paradigma dienen.

Daß eine beliebige abgeschlossene und nicht leere Menge von Richtungen als die Menge der Juliaschen Richtungen einer geeigneten ganzen Funktion von unendlicher Ordnung aufgefaßt werden kann, wird nicht durch die Kombination von Satz I′ und Hilfssatz 3, sondern auf Grund von Hilfssatz 3 durch das Beispiel (9) belegt[44]).

52. Satz II. *Wenn sämtliche Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ der ganzen Funktion*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel der Nullpunkt und dessen Öffnung $< \pi$ ist, so stimmen die Ordnung, die Lindelöfsche Ord-

[44]) Vgl. W. Gontcharoff, Comptes Rendus Paris **185** (1927), p. 1100—1102. Zwei nach Abschluß der Redaktion vorliegender Arbeit erschienene Noten von M. Biernacki, Comptes Rendus **186** (1928), p. 1260—1262 und p. 1410—1412, veranlassen mich zur weiteren Erläuterung der angewandten Methode folgenden, leicht ersichtlichen Satz hervorzuheben: *Eine ganze Funktion $G(z)$ und ihre Derivierte $G'(z)$ erreichen in denselben Winkelräumen denjenigen Höchstwert von Ordnung, Lindelöfscher Ordnung und Typus, der ihnen in der vollen Ebene zukommt.* Hieraus folgt zweierlei: a) *Eine Potenzreihe und ihre Derivierte haben auf dem Konvergenzrand dieselben singulären Stellen* und b) *Wenn $G(z)$ von unendlicher Ordnung ist, so haben die Funktionen*

$$\ldots,\ G''(z),\ G'(z),\ G(z),\ \int_{c_1}^{z} G(z)\,dz,\ \int_{c_2}^{z} dz \int_{c_1}^{z} G(z)\,dz,\ \ldots$$

mindestens eine gemeinsame Juliasche Richtung. a) folgt mittels Hilfssatz 2 und ist trivial, b) folgt mittels Hilfssatz 3 und ist der bequemste Fall eines schönen Resultates von Biernacki.

nung und der Typus von $G(z)$ längs der positiven reellen Achse mit der Ordnung, der Lindelöfschen Ordnung bzw. dem Typus von $G(z)$ in der vollen Ebene überein[45]).

Es sei angenommen, daß der fragliche Winkelraum von der positiven reellen Achse halbiert wird und die Öffnung 2θ hat, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\Re a_n \geqq |a_n| \cos\theta \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Wird, wie üblich (Nr. 47), mit $M(r)$ der Maximalbetrag von $G(z)$ im Kreise $|z| \leqq r$ bezeichnet, so folgt mit Benutzung von (10)

$$M(r) \geqq |G(r)| \geqq \Re G(r) \geqq \cos\theta \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \geqq M(r) \cos\theta,$$

$$\log M(r) + \log\cos\theta \leqq \log|G(r)| \leqq \log M(r),$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log|G(r)|}{\log M(r)} = 1.$$

Es tritt $\log G(r)$ in der Definition der Ordnung, der Lindelöfschen Ordnung und des Typus längs der positiven reellen Achse in derselben Weise auf, wie $\log M(r)$ in der Definition derselben Größen für die volle Ebene (Nr. 46 bis 49).

Der bewiesene Satz II ist ganz besonders selbstverständlich in dem Sonderfall, in welchem alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reell und nichtnegativ sind. Dieser Sonderfall wird später, durch Satz V, beträchtlich verallgemeinert.

53. Derjenige Spezialfall des Satzes II, der den Typus der ganzen Funktionen von Ordnung 1 und Normaltypus betrifft, ist auf Grund von Hilfssatz 2 mit folgendem wohlbekannten Satz[46]) äquivalent:

Satz IIa. *Wenn sämtliche Koeffizienten einer Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel der Nullpunkt und dessen Öffnung $< \pi$ ist, so ist der Schnittpunkt des Konvergenzkreises mit der positiven reellen Achse ein singulärer Punkt für die Reihe.*

Demjenigen Spezialfall des Satzes II, der die Funktionen von unendlicher Ordnung betrifft, entnehmen wir, auf Grund von Hilfssatz 3, den folgenden

[45]) Selbstverständlich läßt Satz II die Möglichkeit offen, daß $G(z)$ keiner bestimmten Lindelöfschen Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$ mit endlichem $\varrho, \varrho_1, \ldots, \varrho_m$ angehört. Es wird nur behauptet, daß $G(z)$ sich in bezug auf die Lindelöfsche Ordnung längs der positiven reellen Achse und in der Vollebene *gleich verhält*. Analoges gilt in bezug auf den Typus und in bezug auf die späteren Sätze III, IV, V, VI, VIII dieses Kapitels.

[46]) Satz von Vivanti-Pringsheim-Dienes. Vgl. Hadamard, a. a. O. [1]), S. 41—42.

Satz IIb. *Wenn sämtliche Koeffizienten einer ganzen Funktion unendlicher Ordnung in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel der Nullpunkt und dessen Öffnung $< \pi$ ist, so ist die Richtung der positiven reellen Achse eine Juliasche Richtung für die Funktion.*

Zwei Bemerkungen zu Satz IIb:

1. Die Voraussetzung, daß die Ordnung ∞ ist, ist wesentlich: e^z hat positive Koeffizienten, und die Richtung der positiven reellen Achse ist die Richtung des raschesten Anwachsens, aber keine Juliasche Richtung für e^z.

2. Es ist möglich, daß die durch Satz IIb festgestellte Juliasche Richtung die einzige Juliasche Richtung der Funktion ist: Die Funktion (8) befindet sich gerade in diesem Fall.

54. Satz III. *Es sei vorgelegt eine beliebige ganze Funktion*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots . \tag{1}$$

Durch die Abänderung der Vorzeichen gewisser geeignet gewählter Koeffizienten entsteht aus (1) *eine ganze Funktion, die in allen Winkelräumen die nämliche Ordnung, die nämliche Lindelöfsche Ordnung und den nämlichen Typus besitzt.*

Ausführlicher gesagt, läßt sich eine unendliche Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, deren Glieder nur der beiden Werte -1 und $+1$ fähig sind, so bestimmen, daß für die Reihe

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 z + \varepsilon_2 a_2 z^2 + \ldots + \varepsilon_n a_n z^n + \ldots$$

die Ordnung (usw.) in einem beliebigen Winkelraum mit der Ordnung (usw.) in der vollen Ebene übereinstimmt.

Ich gebrauche den folgenden bekannten[47])

Hilfssatz 4. *Es sei $M(r)$ der Maximalbetrag und $\mu(r)$ das Maximalglied der ganzen Funktion $G(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$, das heißt*

$$M(r) = \operatorname*{Max}_{|z| \leqq r} |G(z)|, \qquad \mu(r) = \operatorname*{Max}_{n=0,1,2,\ldots} |a_n| r^n .$$

Dann gilt für ganze transzendente Funktionen beliebiger Ordnung

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log r}{\log \mu(r)} = 0, \tag{11}$$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log \mu(r)}{\log r} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \tag{12}$$

und für Funktionen endlicher Ordnung

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{\log \mu(r)} = 1 . \tag{13}$$

[47]) Vgl. z. B. Pólya-Szegö, a. a. O.[17]) **2**, Nr. IV 9, 51, 54, S. 2, 8 und 169, 177, 178.

Es wird genügen, nur denjenigen Teil des Satzes III zu beweisen, der sich auf die Ordnung bezieht. Dann genügt es nur die Beziehungen (11) und (12) des Hilfssatzes 4 zu benutzen (für die anderen Aussagen des Satzes III ist (13) heranzuziehen). Beide Seiten von (12) stellen *die* Ordnung von $G(z)$ (die in der vollen Ebene) dar, die mit ϱ bezeichnet werden mag. Im Falle $\varrho = 0$ ist die Behauptung (für beliebige ε_n) selbstverständlich. Es sei also $\varrho > 0$.

Wir müssen zur Wahl der Vorzeichen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ einige Vorbereitungen treffen. Es sei $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ eine wachsend gegen ϱ konvergierende Folge positiver Zahlen, in Zeichen

$$0 < \varrho_0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots, \qquad \lim \varrho_n = \varrho. \tag{14}$$

Die abzählbare Punktmenge $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ sei im Intervall $0, 2\pi$ überall dicht. Die unendliche Folge $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ soll jedes ψ_m unendlich oft enthalten. Man setzt etwa

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = \psi_1; \\ &\varphi_1 = \psi_1, \quad \varphi_2 = \psi_2; \\ &\varphi_3 = \psi_1, \quad \varphi_4 = \psi_2, \quad \varphi_5 = \psi_3; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nun konstruieren wir zwei Folgen von ganzen Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$, und eine Folge von positiven Zahlen $r_0, r_1, r_2, \ldots$. Es sei $\lambda_0 = 0$ gesetzt. Wir nehmen an, daß λ_n schon konstruiert ist und konstruieren $r_n, \nu_n, \lambda_{n+1}$ unter Berücksichtigung der Zahl ϱ_n und der folgenden Umstände: Es folgt leicht aus (11), daß für alle genügend großen Werte von r

$$|a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \ldots + |a_{\lambda_n - 1}| r^{\lambda_n - 1} < \frac{1}{4} \mu(r) \tag{15}$$

ist. Es folgt leicht aus (12) und der Definition von ϱ und ϱ_n, daß für gewisse beliebig große Werte von r

$$\log \mu(r) > r^{\varrho_n} \tag{16}$$

ist. Es gibt also beliebig große Werte r, für welche (15) und (16) simultan stattfinden. Da der Index des Maximalgliedes gegen ∞ strebt[48]), kann r_n so gewählt werden, daß sowohl (15) wie (16) für $r \geq r_n$ bestehen, und

$$\mu(r_n) = |a_{\nu_n}| r_n^{\nu_n}, \qquad \nu_n > \lambda_n \tag{17}$$

gilt. Hiermit sind r_n und ν_n gewählt. Da die Reihe (1) für $z = r_n$ absolut

[48]) Unmittelbar ersichtlich, auch gleichbedeutend mit (11), vgl. übrigens z. B. Pólya-Szegö, a. a. O. [17]) 2, Nr. IV 2, S. 2 und 169.

konvergiert, gibt es eine ganze Zahl λ_{n+1}, so daß

$$(18) \qquad |a_{\lambda_{n+1}}| r_n^{\lambda_{n+1}} + |a_{\lambda_{n+1}+1}| r_n^{\lambda_{n+1}+1} + \ldots < \frac{1}{4}\mu(r_n)$$

ist. Aus (17) und (18) folgt übrigens offenbar $\lambda_{n+1} > \nu_n$.
Wir erhalten auf diese Weise

$$0 = \lambda_0 < \nu_0 < \lambda_1 < \nu_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \nu_n < \lambda_{n+1} < \ldots .$$

Aus (17) und aus $\nu_n \to \infty$ folgt $r_n \to \infty$ für $n \to \infty$.
Es soll nun ε_m für $\lambda_n \leqq m < \lambda_{n+1}$ so gewählt werden, daß $\varepsilon_m^3 = 1$ und

$$(19) \qquad \Re \frac{\varepsilon_m a_m (r_n e^{i\varphi_n})^m}{a_{\nu_n} (r_n e^{i\varphi_n})^{\nu_n}} \geqq 0$$

ist; ε_m ist im allgemeinen eindeutig bestimmt, z. B. $\varepsilon_{\nu_n} = 1$. Man setze

$$G^*(z) = \varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 z + \ldots + \varepsilon_n a_n z^n + \ldots$$

Gemäß (17) und (19) ist

$$(20) \qquad \left| \sum_{m=\lambda_n}^{\lambda_{n+1}-1} \varepsilon_m a_m (r_n e^{i\varphi_n})^m \right| \geqq \mu(r_n).$$

Es folgt aus der Geltung von (15) für $r = r_n$, aus (20) und aus (18), daß

$$(21) \qquad |G^*(r_n e^{i\varphi_n})| \geqq \mu(r_n) - \frac{1}{4}\mu(r_n) - \frac{1}{4}\mu(r_n) \geqq \frac{1}{2}\exp(r_n^{\varrho_n});$$

es wurde schließlich noch die Gültigkeit von (16) für $r = r_n$ benutzt. Da in der Folge $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ jedes ψ_m unendlich oft auftritt, folgt aus (21) mit Rücksicht auf (14)

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log\log |G^*(r e^{i\psi_m})|}{\log r} = \varrho.$$

Somit ist $G^*(z)$ auf überall dicht liegenden Halbstrahlen, also in jedem Winkelraum von der Ordnung ϱ, w. z. b. w.

Satz III kann, soweit er sich auf den Typus bezieht, anders formuliert werden, nämlich so, daß er von Halbstrahlen anstatt von Winkelräumen handelt: Der Typus ist stetig, vgl. Nr. 48, und wenn $G(z)$ auf überall dichten Halbstrahlen denselben Typus hat, hat es auf *allen* Halbstrahlen denselben Typus.

55. Derjenige Spezialfall des Satzes III, der den Typus der ganzen Funktionen von Ordnung 1 und Normaltypus betrifft, ist auf Grund von Hilfssatz 2 (vgl. auch die Schlußbemerkung in Nr. 54) mit folgendem wohlbekannten Satz[49]) äquivalent:

[49]) Vgl. Hadamard, a. a. O. [1]), S. 74.

Satz IIIa. *Es sei vorgelegt eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius. Durch die Abänderung der Vorzeichen gewisser geeignet gewählter Koeffizienten entsteht daraus eine Potenzreihe, für welche alle Punkte des Konvergenzkreises singuläre Punkte sind.*

Es kann bemerkt werden, daß der hier gegebene Beweis des von Fatou ausgesprochenen Satzes IIIa trotz großer Ähnlichkeit verschieden ist von meinem früheren Beweise dieses Satzes[50]); in dem jetzigen Beweis wurde der auf Borel zurückgehende Hilfssatz 2 an der Stelle benutzt, an welcher der frühere Beweis sich auf einen Hilfssatz von Fabry stützt.

Demjenigen Spezialfall des Satzes III, der die Funktionen von unendlicher Ordnung betrifft, entnehmen wir, auf Grund von Hilfssatz 3, den folgenden

Satz IIIb. *Es sei vorgelegt eine beliebige ganze Funktion unendlicher Ordnung. Durch die Abänderung der Vorzeichen gewisser geeignet gewählter Koeffizienten entsteht daraus eine Funktion, für welche alle Richtungen Juliasche Richtungen sind.*

56. Satz IV. *Die Maximaldichte der von Null verschiedenen Koeffizienten*[51]) *der ganzen Funktion*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

sei $= \Delta$. *Dann ist* $G(z)$ *in jedem Winkelraum, dessen Öffnung* $2\pi\Delta$ *übersteigt, von derselben Ordnung, derselben Lindelöfschen Ordnung und demselben Typus, wie in der vollen Ebene.*

Anders gefaßt: Gibt es einen Winkelraum von der Öffnung α, in dem $G(z)$ von niedrigerer Ordnung (oder von niedrigerer Lindelöfschen Ordnung oder von niedrigerem Typus) ist, als in der vollen Ebene, so ist $\alpha \leqq 2\pi\Delta$.

Ich beschränke mich wieder auf die Untersuchung der Ordnung. Es sei $G(z)$ von der Ordnung ϱ in der vollen Ebene, $\varrho \leqq \infty$, und von der Ordnung ϱ' in dem Winkelraum

$$-\theta \leqq \arg z \leqq \theta, \tag{22}$$

wobei

$$2\pi\Delta < 2\theta < 2\pi \tag{23}$$

sei. Selbstverständlich ist

$$\varrho' \leqq \varrho \tag{24}$$

[50]) Acta Mathematica **40** (1916), p. 179—181.

[51]) Unter der Dichte (untere, obere, Minimal- oder Maximaldichte) einer Koeffizientenfolge $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, a_{\lambda_3}, \dots$ wird die Dichte (obere Dichte usw.) der Folge der Indizes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ im Sinne des Kapitels I verstanden. An Stelle „Dichte der von Null verschiedenen Koeffizienten" wird häufig kürzer „Koeffizientendichte" gesagt.

und wir haben zu untersuchen, ob in dieser Ungleichung das Zeichen $<$ gelten kann oder nicht.

Wie $G(z)$, ist auch die mit den konjugierten Koeffizienten gebildete ganze Funktion

$$(25) \qquad \bar{G}(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \dots$$

von der Ordnung ϱ in der vollen Ebene und von Ordnung ϱ' im Winkelraum (22). Daher sind die reellkoeffizientigen ganzen Funktionen

$$G(z) + \bar{G}(z) \quad \text{und} \quad i(\bar{G}(z) - G(z))$$

beide von Ordnung $\leqq \varrho'$ im Winkelraum (22) und mindestens eine unter ihnen muß von der Ordnung ϱ in der vollen Ebene sein; ferner haben beide eine Koeffizientendichte $\leqq \Delta$. Wäre also $\varrho' < \varrho$ für irgendeine ganze Funktion möglich, so wäre es auch für eine reellkoeffizientige ganze Funktion möglich.

Daher können und wollen wir annehmen, daß $G(z)$ *nur reelle Koeffizienten* hat. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ $(0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots)$ die Indizes der von 0 verschiedenen Koeffizienten; Δ ist also, im Sinne von Nr. 6, die Maximaldichte der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. Wir können ohne Verlust an Allgemeinheit annehmen, daß

$$a_{\lambda_1} > 0.$$

Das Intervall λ_n, λ_{n+1} soll von erster oder von zweiter Art heißen, je nachdem $a_{\lambda_n} a_{\lambda_{n+1}} < 0$ oder > 0 ist.

Jetzt wird der eigens zu diesem Zwecke vorbereitete Hilfssatz A in Kapitel II (vgl. Nr. 45) herangezogen. Aus der darin genannten Funktion $\Phi(z)$ und aus $G(z)$ wird durch „Hadamardsche Komposition" die Reihe

$$(26) \quad F(0)a_0 + F(1)a_1 z + \dots + F(n)a_n z^n + \dots \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi(u) G\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}$$

gebildet.

Gemäß Konstruktion und der Aussage 1 des Hilfssatzes A sind alle Koeffizienten $F(n)a_n$ an der linken Seite von (26) reell und nichtnegativ. Gemäß Aussage 2 des Hilfssatzes A und auf Grund von Hilfssatz 1 des gegenwärtigen Kapitels stellt die linke Seite eine ganze Funktion von Ordnung ϱ dar. Die ganze Funktion (26) ist also (nach dem selbstverständlichen Spezialfall des Satzes II) längs der positiven reellen Achse von Ordnung ϱ.

Das Integral an der rechten Seite von (26) ist ursprünglich längs eines im positiven Sinne durchlaufenen Kreises vom Mittelpunkt $u = 0$ zu erstrecken, dessen Radius < 1 ist. Der Integrand ist, gemäß Aussage 4 des Hilfssatzes A außerhalb des Punktes $u = 0$ und außerhalb des am

Einheitskreise gelegenen Bogens

$$|u| = 1, \qquad -\pi\Delta \leqq \arc u \leqq \pi\Delta \tag{27}$$

regulär und eindeutig, auch für $u = \infty$, wo er wie u^{-2} verschwindet. Daher kann man den Integrationsweg in eine einfache geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ deformieren, die den Bogen (27) im Innern enthält, sich diesem Bogen so nahe anschließt, daß sie ganz in dem Winkelraum (22) verläuft, vgl. (23), und in negativem Sinne beschrieben wird; es soll $\mathfrak{C}$ aus zwei zu (27) konzentrischen, durch die positive reelle Achse halbierten Kreisbögen, von Radien $1-\varepsilon$, $1+\varepsilon$ und gemeinsamer Öffnung $2(\pi\Delta+\varepsilon)$, ferner aus zwei geraden Strecken von Länge 2ε zusammengesetzt sein. Wenn z positiv ist und u sich auf $\mathfrak{C}$ befindet, ist zu^{-1} ein zu Winkelraum (22) gehöriger Punkt und es ist $|zu^{-1}| \leqq z(1-\varepsilon)^{-1}$. Da $G(z)$ in (22) von der Ordnung ϱ' ist, schließt man hieraus bei beliebig kleinem positiven ε, daß für genügend großes positives reelles z die rechte Seite von (26)

$$\leqq \text{konst. } \exp\left(\{z(1-\varepsilon)^{-1}\}^{\varrho'+\varepsilon}\right)$$

ist. Also ist die *Ordnung von* (26) *der positiven reellen Achse entlang* $\leqq \varrho'$. Diese Ordnung ist aber, wie oben festgestellt, $= \varrho$. Somit ist $\varrho \leqq \varrho'$, also gemäß (24), $\varrho' = \varrho$, w. z. b. w.

57. An der entscheidenden Stelle des Beweises von Satz IV sind die Koeffizienten als reell angenommen worden, und wir haben eigentlich, wie geringe Modifikationen des Beweisganges zeigen, folgenden Satz mitbewiesen:

Satz V. *Die Koeffizienten* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *der ganzen Funktion*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

seien reell, und die Maximaldichte derjenigen Koeffizienten, die einen Vorzeichenwechsel bestimmen, sei Δ. *Dann besitzt* $G(z)$ *in jedem Winkelraum, der den Winkelraum*

$$-\pi\Delta \leqq \arc z \leqq \pi\Delta$$

ganz im Innern enthält, dieselbe Ordnung, dieselbe Lindelöfsche Ordnung und denselben Typus, wie in der vollen Ebene.

(Man sagt, daß der Koeffizient a_m einen Vorzeichenwechsel bestimmt, wenn erstens $a_m \neq 0$ ist, und zweitens das Vorzeichen von a_m dem des letzten, a_m vorangehenden nichtverschwindenden Koeffizienten entgegengesetzt ist.)

Man kann aus den Sätzen IV und V durch Spezialisierung und Kombination noch manche weitere gewinnen. Ich begnüge mich damit, einige Sonderfälle des Satzes IV hervorzuheben. Für $\Delta = 0$ erhalten wir den

Satz VI. *Eine ganze Funktion von Koeffizientendichte Null besitzt in allen Winkelräumen die nämliche Ordnung, die nämliche Lindelöfsche Ordnung und den nämlichen Typus.*

Betrachten wir jetzt eine ganze Funktion $G(z)$ vom Normaltypus der Lindelöfschen Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$, wobei $\varrho > 0$, und nehmen wir an, daß der Typus von $G(z)$ entlang des Halbstrahls von Richtung φ_1 nichtpositiv ist. Der Typus von $G(z)$ in der vollen Ebene sei H. Setzt man in (7)

$$\varphi_2 = \varphi, \qquad \varphi_3 = \varphi_1 \quad \frac{\pi}{2\varrho},$$

so erhält man, da jetzt

$$h(\varphi_1) \leqq 0, \qquad h(\varphi_3) \leqq H > 0$$

vorausgesetzt wurde,

$$0 - h(\varphi) + H \sin \varrho(\varphi - \varphi_1) \geqq 0,$$

also

$$h(\varphi) < H \quad \text{für} \quad \varphi_1 \leqq \varphi < \varphi_1 + \frac{\pi}{2\varrho}.$$

Offenbar gilt dasselbe auch für $\varphi_1 - \frac{\pi}{2\varrho} < \varphi \leqq \varphi_1$. Wenn der Typus von $G(z)$ in einem ganzen Winkelraum von Öffnung α nichtpositiv ist, folgt die Existenz eines offenen Winkelraumes von der Öffnung $\frac{\pi}{2\varrho} + \alpha + \frac{\pi}{2\varrho}$, der keinen Halbstrahl enthält, dem entlang die Funktion $G(z)$ den gleichen Typus erreicht, den sie in der Vollebene besitzt. In jedem abgeschlossenen Teilwinkelraum des besagten offenen Winkelraumes ist also $G(z)$, gemäß Satz I, von niedrigerem Typus als in der Vollebene. Satz IV ergibt somit, daß $\frac{\pi}{2\varrho} + \alpha + \frac{\pi}{2\varrho} \leqq 2\pi\Delta$ ist. So kamen wir zum

Satz VII. *Es sei die ganze Funktion $G(z)$ vom Normaltypus der Lindelöfschen Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$ in der Vollebene, aber von nichtpositivem Typus derselben Ordnung in einem Winkelraum von Öffnung α (Halbstrahlen werden hierbei als Winkelräume von Öffnung 0 angesehen). Ist Δ die Maximaldichte der nichtverschwindenden Koeffizienten von $G(z)$, so ist*

$$\Delta \geqq \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{2\varrho}. \tag{28}$$

Das Gleichheitszeichen der Ungleichung (28) kann erreicht werden, es wird sogar für die meisten üblichen Funktionen tatsächlich erreicht, so daß (28) auch in den geläufigsten Fällen „aufklärend wirkt". Ich hebe nur die folgenden Beispiele hervor:

$G(z) = e^z$; $\quad \varrho = 1, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = 0, \quad \alpha = \pi, \quad \Delta = 1.$

$G(z) = \cos z^\varrho$; $\quad 2\varrho$ positiv ganz, $\quad \varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = 0, \quad \alpha = 0, \quad \Delta = \frac{1}{2\varrho}.$

Da $\Delta \leqq 1$ und $\alpha \geqq 0$ ist, hat die Ungleichung (28) zur Folge, daß $\varrho \geqq \frac{1}{2}$ ist. Die Ungleichung (28) hat zur Voraussetzung, vergessen wir es

nicht, daß der Typus von $G(z)$ längs eines Halbstrahls nichtpositiv wird. Daß dies nur für $\varrho \geqq \frac{1}{2}$ geschehen kann, steht mit einem geläufigen Satz von A. Wiman in Übereinstimmung.

58. Die Sätze IV, V, VI, kombiniert mit den Hilfssätzen 2 und 3, ergeben auf die bewährte Art je einen (bekannten) Satz über singuläre Punkte auf der Konvergenzgrenze und je einen (neuen) Satz über die Juliaschen Richtungen ganzer Funktionen unendlicher Ordnung[52]).

Satz IVa. *Wenn die Maximaldichte der von Null verschiedenen Koeffizienten einer Potenzreihe von endlichem Konvergenzradius* $= \Delta$ *ist, so enthält jeder auf dem Konvergenzrand gelegene abgeschlossene Bogen vom Zentriwinkel* $2\pi\Delta$ *mindestens einen singulären Punkt der Potenzreihe.*

Satz IVb. *Wenn die Maximaldichte der von Null verschiedenen Koeffizienten einer ganzen Funktion von unendlicher Ordnung* $= \Delta$ *ist, so enthält jeder abgeschlossene Winkelraum von Öffnung* $2\pi\Delta$ *mindestens eine Juliasche Richtung der ganzen Funktion.*

Satz Va. *Wenn in einer Potenzreihe mit reellen Koeffizienten und endlichem Konvergenzradius die Maximaldichte derjenigen Koeffizienten, die einen Vorzeichenwechsel bestimmen,* $= \Delta$ *ist, so enthält derjenige auf dem Konvergenzrand liegende abgeschlossene Bogen vom Zentriwinkel* $2\pi\Delta$*, der durch die positive reelle Achse halbiert wird, mindestens einen singulären Punkt der Potenzreihe.*

Satz Vb. *Wenn in der Potenzreihe einer ganzen Funktion mit reellen Koeffizienten und von unendlicher Ordnung die Maximaldichte derjenigen*

---

[52]) VIa) ist der bekannte Fabrysche Lückensatz, vgl. E. Fabry, Acta Mathematica **22** (1898), p. 65—87. Vgl. auch Faber, a. a. O. [39]) und Hadamard, a. a. O. [1]), S. 69—73. IVa und Va gehen auch im wesentlichen auf Fabry zurück, vgl. a. a. O. S. 86. Für die Einführung des Begriffes der Maximaldichte vgl. a. a. O. [2b]) und [2c]), für einen anderen Beweis von IVa vgl. die Skizze a. a. O. [2b]), S. 190 und die Ausführungen von Soula, Annales de l'École Normale (3) **44** (1927), p. 97—151, insbesondere S. 126—127; für eine Ausdehnung des Satzes IVa auf Dirichletsche Reihen a. a. O. [2c]) (die dort nur skizzierten Schritte sind hier, insbesondere gelegentlich der Begründung des Hilfssatzes A, voll nachgeholt). Fabry betrachtet übrigens a. a. O. kompliziertere Bedingungen, in welchen das Verschwinden gewisser Koeffizienten mit der Größenordnung anderer kombiniert wird; auch diese Bedingungen sind wesentlicher Erweiterung fähig, vgl. G. Pólya, Math. Annalen **99** (1928), S. 687 bis 706, insbesondere Fußnote [18]) auf S. 703. — Zu der Beweismethode der vorliegenden Arbeit: Die Herleitung des Satzes VIa aus Satz VI, mit Berufung auf Hilfssatz 2, folgt einem von Borel gewiesenen Weg, auf dem er, noch vor Fabry, eine erste Erweiterung des Hadamardschen Lückensatzes, der der Ausgangspunkt aller dieser Untersuchungen ist, fand; vgl. Journal de math. pures et appliquées (5), **2** (1896), p. 441—451. — Für IVb, Vb, VIb vgl. a. a. O.[2h]).

Koeffizienten, die einen Vorzeichenwechsel bestimmen, $< \Delta$ ist, so erhält derjenige abgeschlossene Winkelraum von Öffnung $2\pi\Delta$, der durch die positive reelle Achse halbiert wird, mindestens eine Juliasche Richtung der ganzen Funktion.

Satz VIa. *Für eine Potenzreihe von endlichem Konvergenzradius und Koeffizientendichte Null sind alle Punkte des Konvergenzkreises singulär.*

Satz VIb. *Für eine ganze Funktion unendlicher Ordnung von Koeffizientendichte Null sind alle Richtungen Juliasche Richtungen.*

In Satz IVb läßt sich die Winkelöffnung $2\pi\Delta$ durch keine kleinere ersetzen. Ja, es würde aus IVb ein falscher Satz schon dadurch entstehen, daß man „offenen Winkelraum" an Stelle „abgeschlossenen Winkelraum" sagt. Denn bedeutet $E(z)$ die unter (8) angegebene ganze Funktion unendlicher Ordnung, und wird $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ gesetzt, so hat die ganze Funktion

$$G(z) = E(z) + E(z\omega) + E(z\omega^2) + \ldots + E(z\omega^{m-1})$$

die Koeffizientendichte $\frac{1}{m}$ und genau m äquidistante Juliasche Richtungen, so daß zwischen zwei sukzessiven Juliaschen Richtungen ein offener Winkelraum von Öffnung $\frac{2\pi}{m} = 2\pi\Delta$ liegt.

Für Satz Vb ist die Voraussetzung, daß die Ordnung $= \infty$ ist, wesentlich. Vgl. die Bemerkungen zu Satz IIb.

Weitere Eigenschaften der ganzen Funktionen von Koeffizientendichte Null.

59. Es soll in dieser Nummer von *krummlinigen Winkelräumen* die Rede sein. Ein krummliniger Winkelraum $\mathfrak{W}$ wird durch die Angabe einer stetigen Kurve $\mathfrak{L}$ und einer Zahl δ bestimmt. $\mathfrak{L}$ muß vom Punkte $z = 0$ ausgehen und im Punkte $z = \infty$ münden, δ muß der Ungleichung $0 < \delta < 1$ genügen. Der krummlinige Winkelraum $\mathfrak{W}$ ist die Vereinigungsmenge aller Kreisscheiben, deren Mittelpunkt ein Punkt der Kurve $\mathfrak{L}$ ist, und deren Radius zum Abstand des Mittelpunktes vom Nullpunkt im festen Verhältnis $\delta : 1$ steht. $\mathfrak{L}$ wird die „Mittellinie" von $\mathfrak{W}$ genannt. Im Spezialfall, in dem $\mathfrak{L}$ ein vom Punkt $z = 0$ ausgehender Halbstrahl ist, erhalten wir einen gewöhnlichen (geradlinigen) Winkelraum von Öffnung $2 \arcsin \delta < \pi$, und $\mathfrak{L}$ ist die Winkelhalbierende.

Satz VIII. *Eine ganze Funktion von Koeffizientendichte Null hat in allen geradlinigen und krummlinigen Winkelräumen die nämliche Ordnung, die nämliche Lindelöfsche Ordnung und den nämlichen Typus.*

Es wird genügen, wie in vorangehenden analogen Fällen, den Fall der Ordnung zu betrachten. Die Ordnung der ganzen Funktion $G(z)=a_0+a_1z+\dots$ in der Ebene sei ϱ und ihre Ordnung in dem krummlinigen Winkelraum $\mathfrak{W}$ sei ϱ'. Selbstverständlich ist

$$0 \leqq \varrho' \leqq \varrho \tag{29}$$

und es steht nur in Frage, ob $\varrho' < \varrho$ möglich ist oder nicht. Daß ϱ die Ordnung von $G(z)$ ist, wird durch (5) ausgedrückt. Zu einer (beliebig gewählten) festen positiven Zahl ε läßt sich eine positive Konstante A so zuordnen, daß in jedem Punkt z von $\mathfrak{W}$

$$|G(z)| \leqq A e^{|z|^{\varrho'+\varepsilon}} \tag{30}$$

gilt. Der krummlinige Winkelraum $\mathfrak{W}$ sei, wie am Anfang dieser Nummer erläutert, durch seine Mittellinie $\mathfrak{L}$ und die Zahl δ bestimmt.

Wir nehmen an, daß $\varrho > 0$ ist (sonst ist offenbar $\varrho' = 0 = \varrho$) und führen die Rechnung für endliches ϱ durch; der Fall $\varrho = \infty$ erfordert nur unwesentliche Modifikationen. Wir werden auf der Kurve $\mathfrak{L}$ durch wiederholte Auswahl eine Punktfolge bezeichnen, die uns zur Entscheidung unserer Frage führen soll.

Erste Auswahl. Es sei die feste positive Zahl ε so gewählt, daß

$$\varepsilon < \delta, \qquad 2\varepsilon < \varrho \tag{31}$$

ist. Dann gibt es, gemäß (5), eine unendliche Folge $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ von ganzen Zahlen, $0 < m_1 < m_2 < m_3 < \dots$, so daß

$$\log|a_m| > -\frac{1}{\varrho-\varepsilon} m \log m \qquad \text{für} \qquad m = m_n, \tag{32}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$. Da $\mathfrak{L}$ stetig von $z=0$ zu $z=\infty$ läuft, liegt auf $\mathfrak{L}$ (mindestens) ein Punkt z_n, so beschaffen, daß

$$|z_n|^{\varrho-2\varepsilon} = m_n. \tag{33}$$

Es strebt z_n offenbar gegen ∞, wegen (31).

Zweite Auswahl. Es sei $\arc z_n$ durch die Ungleichung

$$-\pi < \arc z_n \leqq \pi$$

eindeutig bestimmt. Die unendliche Zahlenfolge $\arc z_1, \arc z_2, \dots$ hat mindestens einen Häufungspunkt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß 0 ein solcher Häufungspunkt ist. Man greife aus der Folge $z_1, z_2, z_3, \dots$ eine Teilfolge, die mit $z_1', z_2', z_3', \dots$ bezeichnet werden mag, so heraus, daß

$$\lim_{n\to\infty} \arc z_n' = 0 \tag{34}$$

ist.

Dritte Auswahl. Es sei der m-te Koeffizient von $G(z)$

$$a_m = \alpha_m + i\beta_m,$$

α_m und β_m reell. Es ist

$$|a_m|^2 = \alpha_m^2 + \beta_m^2$$

und folglich ist

(35) entweder $|a_m| < \sqrt{2}\,|\alpha_m|$ oder $|a_m| \leqq \sqrt{2}\,|\beta_m|$.

Unter den Koeffizienten, deren Indizes $|z_1'|^{\varrho-2\varepsilon}, |z_2'|^{\varrho-2\varepsilon}, \ldots$ sind, gibt es entweder unendlich viele solche, für welche die erste, oder unendlich viele solche, für welche die zweite unter (35) genannte Alternative zutrifft. Nehmen wir an, daß die erste Alternative für die unendliche Teilfolge $z_1'', z_2'', z_3'', \ldots$ der Folge $z_1', z_2', z_3', \ldots$ die zutreffende ist, also daß

(36) $|a_m| < \sqrt{2}\,|\alpha_m|$ für $m = |z_n''|^{\varrho-2\varepsilon}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

60. Die Dichte der nichtverschwindenden Koeffizienten a_n ist nach Voraussetzung > 0, und um so mehr die der nicht verschwindenden α_n. Daher können wir auf Grund des Hilfssatzes A in Kapitel II, Nr. 45 (eigentlich auf Grund eines schon vorher bekannten viel einfacheren Spezialfalles davon) ähnlich wie in Nr. 56 eine ganze Funktion $F(z)$ mit folgenden Eigenschaften bestimmen: Erstens ist

(37) $$\alpha_n F(n) \geqq 0 \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ferner ist

(38) $$\lim_{n \to \infty} \lambda_n^{-1} \log |F(\lambda_n)| = 0,$$

wenn λ_n die Indizes der nichtverschwindenden α_m durchläuft, und schließlich ist die durch die Potenzreihe

$$F(0) + F(1)z + F(2)z^2 + \ldots = \Phi(z)$$

definierte Funktion $\Phi(z)$ mit Ausnahme des einzigen Punktes $z = 1$ überall regulär, auch für $z = \infty$, wo sie verschwindet.

Wir betrachten

(39) $$G^*(z) = \alpha_0 F(0) + \alpha_1 F(1)z + \alpha_2 F(2)z^2 + \ldots$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi(u) \frac{1}{2} \left(G\left(\frac{z}{u}\right) + \bar{G}\left(\frac{z}{u}\right) \right) \frac{du}{u}.$$

$G(z)$ ist unter (25) erklärt worden; das Integral auf der rechten Seite von (39) ist entlang des Kreises

(40) $$\left| \frac{1}{u} - 1 \right| = \varepsilon$$

in negativem Sinne erstreckt, vgl. die Bemerkungen zu (26) unter Nr. 56.

Die Punktfolge $z_1'', z_2'', z_3'', \ldots$ liegt auf der Mittellinie $\mathfrak{L}$ des Winkelraums $\mathfrak{W}$. Daher gilt (30) in der Kreisfläche

$$|z - z_n''| \leqq \delta |z_n''|. \tag{41}$$

Es gilt

$$|G(z)| \leqq A e^{|z|^{\varrho'+\varepsilon}} \tag{42}$$

in der zu (41) spiegelbildlich gelegenen Kreisfläche

$$|z - \bar{z}_n''| \leqq \delta |z_n''|. \tag{43}$$

Wegen (31) und (34) ist die Kreislinie

$$|z - |z_n''|| = \varepsilon |z_n''|$$

für genügend großes n in beiden Kreisflächen (41) und (43) zugleich enthalten. Auf der Integrationslinie (40) ist

$$\left| \frac{z_n''}{u} - |z_n''| \right| = \varepsilon |z_n''|$$

und daher gilt für genügend großes n

$$G^*(|z_n''|) \leqq \frac{1}{2\pi} \oint |\Phi(u)| A e^{((1+\varepsilon)|z_n''|)^{\varrho'+\varepsilon}} \left| \frac{du}{u} \right| \tag{44}$$

$$= C \cdot \exp\left(\{(1+\varepsilon)|z_n''|\}^{\varrho'+\varepsilon} \right),$$

wo C eine von n unabhängige positive Konstante ist.

Nun ist, da die Koeffizienten links in (39) nichtnegativ sind, für $r > 0$

$$\alpha_m F(m) r^m < G^*(r). \tag{45}$$

Wenn man berücksichtigt, wie die Folge $z_1'', z_2'', z_n'', \ldots$ ausgewählt wurde, so erhält man für genügend großes n und für

$$m = r^{\varrho-2\varepsilon} = |z_n''|^{\varrho-2\varepsilon} \tag{46}$$

aus (38)

$$|F(m)| > e^{-\varepsilon m} \tag{47}$$

ferner aus (32), (36), (45), (44), (47)

$$-\frac{m \log m}{\varrho - \varepsilon} < \log |a_m| < \log |\alpha_m| + \frac{1}{2} \log 2$$

$$< -m \log r + \log G^*(r) - \log F(m) + \frac{1}{2} \log 2$$

$$< -m \log r + ((1+\varepsilon) r)^{\varrho'+\varepsilon} + \varepsilon m + \log C \sqrt{2},$$

also durch Elimination von r mittels (46)

$$\left(\frac{1}{\varrho - 2\varepsilon} - \frac{1}{\varrho - \varepsilon} \right) m \log m < (1+\varepsilon)^{\varrho'+\varepsilon} m^{\frac{\varrho'+\varepsilon}{\varrho-2\varepsilon}} + \varepsilon m + \log C \sqrt{2}. \tag{48}$$

Es kann aber (48) für große Werte von $m = |z_n''|^{\varrho - 2\varepsilon}$ offenbar nur dann bestehen, wenn

$$\varrho' + \varepsilon > \varrho - 2\varepsilon$$

ist. Hieraus schließt man, da ε beliebig klein sein kann, in Verein mit (29)

$$\varrho' = \varrho,$$

w. z. b. w.

61. Satz IX. *Wenn die Koeffizientendichte einer ganzen Funktion $G(z)$ von endlicher Ordnung Null ist, so ist, wenn z entlang irgendeines stetigen Weges ins Unendliche strebt,*

$$\overline{\lim_{\infty}} \frac{\log |G(z)|}{\log M(|z|)} = 1.$$

$M(r)$ bezeichnet, wie bisher, das Maximum von $|G(z)|$ auf dem Kreisrand $|z| = r$. Der Beweis von Satz IX muß durch einige Hilfssätze vorbereitet werden.

62. Hilfssatz 5. *Es sei $G(z)$ eine ganze Funktion, und es sei*

$\mu(r)$ *das Maximalglied,*
$\nu(r)$ *der Index des Maximalgliedes,*
λ *die Ordnung*

von $G(z)$, und zwar sei λ endlich und $\lambda > 0$. Es sei δ gegeben, $\delta > 0$. Dann gibt es beliebig große Werte r, so beschaffen, daß

$$\nu(r(1+\delta)) < 2\lambda(1+\delta)^{2\lambda} \log \mu(r).$$

Zum Beweise betrachten wir eine positive Zahl C und untersuchen, ob es möglich ist, daß für $r \geqq r_0$ ständig

$$\nu(r(1+\delta)) \geqq C \log \mu(r) \tag{49}$$

gilt. Wir wollen

$$\mu(r_0) > 1 \tag{50}$$

annehmen. Bekanntlich ist[53])

$$\log \mu(r) = \log \mu(0) + \int_0^r \nu(t) t^{-1} dt, \tag{51}$$

falls wir die (nur unwesentlich einschränkende) Voraussetzung $G(0) \neq 0$ treffen. Aus (49) und (51) folgt für $r \geqq r_0$

$$\log \mu(r(1+\delta)^2) - \log \mu(r(1+\delta)) = \int_r^{r(1+\delta)} \nu(t(1+\delta)) t^{-1} dt$$
$$\geqq C \int_r^{r(1+\delta)} \log \mu(t) t^{-1} dt \geqq \log \mu(r) \cdot C \log(1+\delta),$$

[53]) Vgl. z. B. a. a. O.[17]) **2**, Nr. IV 33, S. 5 und 172.

weil $\mu(r)$ stets zunimmt; aus demselben Grunde folgt weiter

$$\log \mu(r(1+\delta)^2) \geqq (1 + C\log(1+\delta))\log\mu(r). \tag{52}$$

Ersetzen wir r in (52) durch r_0, $r_0(1+\delta)^2$, $r_0(1+\delta)^4$, ..., $r_0(1+\delta)^{2n-2}$, so ergibt sich

$$\frac{\log\mu(r_0(1+\delta)^{2n})}{\{r_0(1+\delta)^{2n}\}^{\lambda+\varepsilon}} \geqq \left\{\frac{1+C\log(1+\delta)}{(1+\delta)^{2\lambda+2\varepsilon}}\right\}^n \frac{\log\mu(r_0)}{r_0^{\lambda+2}}. \tag{53}$$

Da λ die Ordnung von $G(z)$ ist, strebt die linke Seite von (53) gegen Null für $n\to\infty$ bei jedem positiven Wert ε. Hieraus folgt wegen (50)

$$1 + C\log(1+\delta) < (1+\delta)^{2\lambda+2\varepsilon}. \tag{54}$$

Weil (54) für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, ergibt sich

$$C \leqq \frac{(1+\delta)^{2\lambda}-1}{\log(1+\delta)} = \frac{\int_1^{1+\delta} 2\lambda x^{2\lambda}\cdot x^{-1}\,dx}{\int_1^{1+\delta} x^{-1}\,dx} < 2\lambda(1+\delta)^{2\lambda}. \tag{55}$$

Wenn C der Ungleichung (55) nicht genügt, gibt es also beliebig große Werte r, für welche (49) nicht gilt. Dies beweist den Hilfssatz 5.

Hilfssatz 6. *Es sei $M(r)$ der Maximalbetrag der in Hilfssatz 5 erwähnten ganzen Funktion $G(z)$. Es gibt beliebig große Werte r, für welche die drei Ungleichungen*

$$\log\mu(r) > (1-\delta)\log M(r), \tag{56}$$

$$\nu(r) < 2\lambda(1+\delta)^{2\lambda}\log M(r), \tag{57}$$

$$\log M(r(1+\delta)) < (1 + 2\lambda\delta(1+\delta)^{2\lambda})\log M(r) \tag{58}$$

simultan richtig sind.

(57) folgt unmittelbar aus Hilfssatz 5, weil es für alle r

$$\nu(r) \leqq \nu(r(1+\delta)), \qquad \mu(r) \leqq M(r)$$

gilt. Für die in Hilfssatz 5 genannten speziellen Werte r, für welche also auch (57) stattfindet, ist ferner

$$\begin{aligned}\log\mu(r(1+\delta)) &= \log\mu(r) + \int_r^{r(1+\delta)} \nu(t)\,t^{-1}\,dt\\ &\leqq \log\mu(r) + \nu(r(1+\delta))\log(1+\delta)\\ &< (1 + 2\lambda(1+\delta)^{2\lambda}\log(1+\delta))\log\mu(r).\end{aligned}$$

Hieraus und aus (13) folgt nun (58) für genügend große, im Hilfssatz 5 genannte r wegen

$$\log(1+\delta) < \delta.$$

Schließlich ist (56) wegen (13) für alle genügend großen Werte von r richtig, also insbesondere für diejenigen, für welche das simultane Bestehen von (57) und (58) eben nachgewiesen wurde.

63. Hilfssatz 7. *Es sei die analytische Funktion $f(z)$ regulär in einer abgeschlossenen Kreisfläche vom Radius ϱ. Auf dem Rande des Kreises sei $|f(z)| \leqq M$ und entlang eines Radius sei $|f(z)| \leqq N < M$. Dann gilt im konzentrischen Kreis vom Radius $\frac{1}{6}\varrho$*

$$|f(z)| \leqq \sqrt{MN}.$$

Es handle sich um den Kreis $|z| \leqq \varrho$ und um den Radius, der den Punkt $z = 0$ mit $z = -\varrho$ verbindet. Innerhalb des besagten Kreises und außerhalb des besagten Radius ist die Hilfsfunktion

$$h(z) = N^{\left(\frac{i|\varrho - |z}{i|\varrho + |z}\right)^{\frac{2i}{\pi}\log\frac{N}{M}}}$$

regulär; im besagten Gebiet ist

$$|z| = z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}} \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi < \pi$$

und

$$\frac{i|\varrho - |z}{i|\varrho + |z} = Re^{i\psi} \quad \text{mit} \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}$$

zu setzen und für $\log\frac{N}{M}$ ist der reelle Wert zu nehmen. Dann ist

$$|h(z)| = M^{\frac{2\psi}{\pi}} N^{1-\frac{2\psi}{\pi}}.$$

Es wird $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $|h(z)| = M$, wenn z dem Kreisrand, $\psi = 0$, $|h(z)| = N$, wenn z dem besagten Radius sich nähert.

Es ist $\psi = \frac{\pi}{4}$, $h(z) = \sqrt{MN}$ entlang einer Linie, die durch Hinzufügen des Punktes $z = -\varrho$ geschlossen gemacht wird. Wie eine elementare Diskussion zeigt, gehört die volle Kreisfläche $|z| \leqq \varrho(|2-1)^2$ (und um so mehr die Kreisfläche $|z| \leqq \frac{1}{6}\varrho$) zum Bereich, der von der Linie $\psi = \frac{1}{4}\pi$ umschlossen wird. Die Anwendung des Prinzips vom Maximum auf $f(z)h(z)^{-1}$ ergibt in üblicher Weise den Hilfssatz 7.

Hilfssatz 8. *Es sei die analytische Funktion $f(z)$ regulär in einer abgeschlossenen Kreisfläche vom Radius ϱ. Auf dem Rande des Kreises sei $|f(z)| \leqq M$ und entlang einer stetigen Kurve, die den Mittelpunkt des Kreises mit dessen Rand verbindet, sei $|f(z)| \leqq m < M$. Dann gilt im konzentrischen Kreis vom Radius $\frac{1}{6}\varrho$*

$$|f(z)| \leqq m^{\frac{1}{3}} M^{\frac{2}{3}}.$$

Es handelt sich um den Kreis $|z| \leqq \varrho$; die besagte stetige Kurve soll $\mathfrak{l}$ heißen und den Punkt $z = 0$ mit $z = -\varrho$ verbinden, und $f(z)$ sei für $|z| \leqq \varrho$ durch die Reihe

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

dargestellt. Die Funktion

$$\bar{f}(z) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 z + \bar{c}_2 z^2 + \dots$$

ist entlang $\bar{\mathfrak{l}}$, des Spiegelbildes von $\mathfrak{l}$ in bezug auf die reelle Achse, dem Betrage nach $\leqq m$ und im ganzen Kreis $|z| \leqq \varrho$, ebenso wie $f(z)$, dem Betrage nach $\leqq M$. Es gilt daher sowohl auf $\mathfrak{l}$ wie auf $\bar{\mathfrak{l}}$

$$|f(z)\bar{f}(z)| \leqq Mm. \tag{59}$$

Die Ungleichung (59) gilt auch für $z = x$, wenn x reell und $-\varrho \leqq x \leqq 0$ ist; denn x liegt entweder auf der Kurve $\mathfrak{l}$, oder im Inneren eines Bereiches, deren Begrenzung auf einer Seite der reellen Achse ein Bogen von $\mathfrak{l}$, auf der anderen Seite der symmetrische Bogen von $\bar{\mathfrak{l}}$ ist. Somit gilt

$$|f(x)|^2 = f(x)\bar{f}(x) \leqq Mm \quad \text{für} \quad -\varrho \leqq x \leqq 0.$$

Um Hilfssatz 8 zu erhalten, ist nur Hilfssatz 7 auf $f(z)$ mit $N = \sqrt{Mm}$ anzuwenden.

Hilfssatz 8 stammt von Milloux[54]), abgesehen von den Werten der darin auftretenden Konstanten, die von der vorgetragenen einfachen Beweisanordnung geliefert wurden.

64. Es sei $\mathfrak{L}$ eine stetige Kurve, der einen gewissen Punkt z_0 mit ∞ verbindet. Es sei vorausgesetzt, daß in jedem auf $\mathfrak{L}$ gelegenen Punkt z

$$|G(z)| \leqq M(|z|)^{\alpha} \tag{60}$$

stattfindet, wobei $G(z)$ die in Satz IX erwähnte Funktion bedeutet und

$$\alpha \leqq 1 \tag{61}$$

ist. Wir haben zu untersuchen, ob α notwendigerweise $= 1$ sein muß, wie Satz IX es behauptet, oder ob $\alpha < 1$ möglich ist. Es soll auf der Kurve $\mathfrak{L}$ eine zur Entscheidung dieser Frage geeignete Punktfolge durch wiederholte Auswahl bezeichnet werden, nach dem Muster der Überlegung in Nr. 59.

Erste Auswahl. Gemäß Hilfssatz 6 läßt sich zu einem fest gegebenen positiven δ eine Zahlenfolge $r_1, r_2, r_3, \dots$ so bestimmen, daß

$$|z_0| < r_1 < r_2 < \dots \qquad (r_n \to \infty)$$

[54]) H. Milloux, Journal de Math. pures et appl. (9) **3** (1924), p. 345—401, vgl. S. 347—348.

und daß für $r = r_n$ alle drei Ungleichungen (56), (57), (58) simultan stattfinden ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Wegen der Stetigkeit der Kurve $\mathfrak{L}$ liegt auf ihr (mindestens) ein Punkt z_n, so beschaffen, daß $|z_n| = r_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Zweite Auswahl. Man nehme an, wie unter Nr. 59, daß die Folge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ eine Teilfolge $z_1', z_2', z_3', \ldots$ enthält, so beschaffen, daß

$$\lim_{n \to \infty} \arc z_n' = 0. \tag{62}$$

Dritte Auswahl. Man nehme an, ähnlich wie unter Nr. 59, daß die Folge $z_1', z_2', z_3', \ldots$ eine Teilfolge $z_1'', z_2'', z_3'', \ldots$ enthält, so beschaffen, daß

$$|a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)} > \frac{1}{\sqrt{2}} |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu(r) \tag{63}$$

für $r = |z_1''|, |z_2''|, |z_3''|, \ldots$ ist.

Man bilde, wie unter Nr. 60, die ganze Funktion (39).

In dem Kreise, vom Mittelpunkt z_n'' und Radius $\delta |z_n''|$ ist offenbar stets

$$|G(z)| \leqq M(|z_n''|(1+\delta)). \tag{64}$$

Die Kurve $\mathfrak{L}$ geht durch z_n'' und ein gewisses Stück von $\mathfrak{L}$ verbindet z_n'' mit einem Randpunkt des genannten Kreises. Entlang dieses Stückes ist, gemäß der Voraussetzung (60),

$$|G(z)| \leqq M(|z_n''|(1+\delta))^{\alpha}.$$

Kraft Hilfssatz 8 folgt aus dem Gesagten in der Kreisfläche

$$|z - z_n''| \leqq \frac{1}{6} \delta |z_n''| \tag{65}$$

$$|G(z)| \leqq M(|z_n''|(1+\delta))^{\frac{3+\alpha}{4}}. \tag{66}$$

Analoges gilt für die mit den konjugierten Koeffizienten gebildete Funktion $G(z)$ in der Kreisfläche, die das Spiegelbild von (65) in bezug auf die reelle Achse ist. Man schließt hieraus, auf Grund von (39) wie unter Nr. 60, daß es eine Konstante C, $C > 0$, existiert, so daß

$$G^*(|z_n''|) < C M(|z_n''|(1+\delta))^{\frac{3+\alpha}{4}}. \tag{67}$$

Weil die Koeffizienten $F(n)\alpha_n$ der Reihe (39) sämtlich reell und nichtnegativ sind, gilt

$$F(\nu(r))\alpha_{\nu(r)} r^{\nu(r)} < G^*(r) \tag{68}$$

für beliebiges r. Hieraus schließt man, indem man auf die linke Seite (63), auf die rechte Seite (67) anwendet

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mu(r) F(\nu(r)) < C M(r(1+\delta))^{\frac{3+\alpha}{4}} \quad \text{für } r = |z_n''|. \tag{69}$$

Es folgt nun weiter aus Behauptung 2 von Hilfssatz A, daß für genügend großes n

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mu(r)e^{-\delta\nu(r)} < C\,M(r(1+\delta))^{\frac{3+\alpha}{4}}$$

oder

$$\log\mu(r) < \log\sqrt{2}\,C + \delta\nu(r) + \frac{3+\alpha}{4}\log M(r(1+\delta)) \tag{70}$$

$$\text{für } r = |z_n''|.$$

Da aber die Beträge $|z_n''|$ so gewählt sind, daß auf sie die Ungleichungen (56), (57), (58) des Hilfssatzes 6 anwendbar sind, ergibt sich weiter aus (70)

$$1-\delta < \frac{\log\sqrt{2}\,C}{\log M(r)} + \delta\,2\lambda(1+\delta)^{2\lambda} + \frac{3+\alpha}{4}(1+2\lambda\delta(1+\delta)^{2\lambda}) \tag{71}$$

$$\text{für } r = |z_n''|.$$

Schließlich ergibt sich, wenn man in (71) zuerst n, also r gegen ∞, und *danach* δ gegen 0 streben läßt,

$$1 \leqq \frac{3+\alpha}{4},$$

also, vgl. (61),

$$\alpha = 1,$$

w. z. b. w.

65. Man sagt, daß *a Konvergenzwert* der ganzen Funktion $G(z)$ ist, wenn es eine im Punkte ∞ mündende stetige Kurve $\mathfrak{L}$ gibt, der entlang $G(z)$ gegen a strebt. Dem eben bewiesenen Satz IX können wir insbesondere entnehmen, daß eine *ganze Funktion endlicher Ordnung von Koeffizientendichte Null*, da sie auf keiner im ∞ mündenden Kurve beschränkt bleibt, *keinen endlichen Konvergenzwert besitzt.* In dieser Aussage ist die Voraussetzung der endlichen Ordnung wesentlich; es gibt nämlich ganze Funktionen unendlicher Ordnung von Koeffizientendichte Null, die der positiven reellen Achse entlang gegen Null streben, wie die folgende Konstruktion zeigt.

a) Es sei $l_1, l_2, l_3, \ldots$ eine wachsende Folge ganzer Zahlen und $N(r)$ ihre Anzahlfunktion (vgl. Nr. 5). Es sei vorausgesetzt, daß

$$2 < l_1 < l_2 < l_3 < \ldots \tag{72}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r)\log\log r}{r} = 1 \tag{73}$$

ist. (72), (73) sind z. B. erfüllt, wenn l_n als der ganze Teil von $(n+25)\log\log(n+25)$ gewählt wird.

Man setze

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{l_n^2}\right) = g(z).$$

Man erhält ohne Schwierigkeit[55], mit Rücksicht auf das durch (73) angegebene einfache Verhalten von $N(r)$, daß

$$\frac{\log|g(re^{i\varphi})|}{N(r)} = \frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty}\log\left|1-\left(\frac{l_n}{r}\right)^{-2}e^{2i\varphi}\right|$$

$$\to\int_0^{\infty}\log|1-x^{-2}e^{2i\varphi}|\,dx=\pi|\sin\varphi|,$$

wenn $r\to\infty$ und φ einen festen, von ganzzahligen Multipla von π verschiedenen Wert hat. Man folgert hieraus, daß es zwei positive Konstanten a und r_0 gibt, so beschaffen, daß

$$\frac{1}{|g(z)|} < e^{-\frac{ar}{\log\log r}} \tag{74}$$

für $|z|=r>r_0$, $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$ und für $r>r_0$, $-\frac{3\pi}{4}<\varphi<-\frac{\pi}{4}$.

Eine unschwere Rechnung ergibt ferner, daß mit einer passenden Konstante b

$$\frac{1}{|g(z)|} < e^{\frac{br}{\log\log r}} \quad \text{für} \quad |z|=r=\frac{1}{2}(l_n+l_{n+1}) \qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{75}$$

Etwas weniger als (75) folgt ohne weiteres aus einem wohlbekannten Satz von Hadamard und etwas mehr aus einer geringfügigen Modifikation der Rechnung, die zu (48) in Nr. 14 führte.

b) Wir betrachten dasjenige Gebiet der w-Ebene, in der

$$2<|w|<\frac{1}{2}(l_n+l_{n+1}), \qquad -\frac{\pi}{2}<\arc w<\frac{\pi}{2} \tag{76}$$

gilt; seine Berandung besteht aus zwei Halbkreisen und zwei Geradenstücken. Wir betrachten denjenigen Zweig der Funktion $\log\log w$, der entsteht, wenn wir für die ins Gebiet (76) fallenden reellen w beide Logarithmen reell nehmen; der betrachtete Zweig von $\log\log w$ ist in (76) regulär und eindeutig. Es sei $x>0$ und

$$x^w = e^{w\log x}$$

mit reellem $\log x$. Es ist, wenn die Integration in positivem Sinne um (76) herum erstreckt wird,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{x^w e^{-w\log\log w}\,dw}{g(w)} = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{x^{l_\nu}e^{-l_\nu\log\log l_\nu}}{g'(l_\nu)}; \tag{77}$$

auch (72) ist zu beachten.

[55] Vgl. (47) unter Nr. 14 des I. Kapitels oder Pólya-Szegö, a. a. O. [17] 1, S. 67–69 und S. 230–234.

Im Gebiet (76) ist für die betrachteten Funktionszweige ($w = u + iv$ gesetzt, u, v reell)

$$\log w = \log|w| + i\psi, \qquad \psi = \operatorname{arctg}\frac{v}{u},$$

$$-\Re\, w \log\log w = -\frac{1}{2}u\log[(\log|w|)^2 + \psi^2] + v\operatorname{arctg}\frac{\psi}{\log|w|},$$

wobei für arctg beide Male der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ gelegene Wert zu nehmen ist. Hieraus und aus (74), (75) können wir schließen, daß der Integrand in (77) auf dem Halbkreis

$$|w| = \frac{1}{2}(l_n + l_{n+1})$$

für genügend großes n

$$< \exp\left(|w|\left\{\cos\psi(-\log\log|w| + \log x) + \frac{2\psi\sin\psi}{\log|w|} + \frac{c}{\log\log|w|}\right\}\right)$$

ist; für $-\frac{1}{4}\pi < \psi < \frac{1}{4}\pi$ ist

$$c = b$$

zu setzen, vgl. (75), und das Glied mit $\log\log|w|$ ist überwiegend; für $\frac{1}{4}\pi \leqq \psi \leqq \frac{1}{2}\pi$ und für $-\frac{1}{2}\pi \leqq \psi \leqq -\frac{1}{4}\pi$ ist

$$c = -a$$

zu setzen, vgl. (74), und das $c = -a$ enthaltende Glied überwiegt dasjenige mit $\psi\sin\psi$. Somit strebt ersichtlicherweise das von dem großen Halbkreis herrührende Teil des Integrals (77) gegen 0 für $n \to \infty$, und wir erhalten

$$(78) \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{x^w e^{-w\log\log w}\,dw}{g(w)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{x^{l_\nu}e^{-l_\nu\log\log l_\nu}}{g'(l_\nu)}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{g'(l_\nu)}\left(\frac{x}{\log l_\nu}\right)^{l_\nu} = x^{l_1}G(x).$$

c) Das Integral unter (78) ist entlang der imaginären Achse erstreckt, mit Ausnahme einer halbkreisförmigen Einbuchtung nach rechts, vom Zentrum $w = 0$ und Radius 2. Wir können den Radius auf $1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) hinunterdrücken; es muß nämlich nur der singuläre Punkt $w = 1$ von $\log\log w$ umgangen werden. Hieraus ist ersichtlich, daß für $x \to +\infty$ das Integral unter (78) die Größenordnung $x^{1+\varepsilon}$ nicht übersteigt.

Das in der zweiten Zeile von (78) auftretende Zeichen $G(x)$ bezeichnet eine Potenzreihe in x. (Die Koeffizienten sind reell und vom abwechselnden Vorzeichen, das absolute Glied $\neq 0$). Wie durch (78) mitbewiesen, konvergiert $G(x)$ für sämtliche positiven Werte von x, also überhaupt für alle komplexen Werte von x; $G(x)$ ist eine ganze Funktion. Für positiv wachsendes x bleibt $G(x)$ unterhalb der Größenordnung $x^{1+\varepsilon-l_1}$, strebt also gegen 0, vgl. (72).

Nun hat $G(x)$, gemäß (73), die Koeffizientendichte 0. Es muß also $G(x)$, gemäß Satz IX, von unendlicher Ordnung sein (was übrigens auch leicht direkt festzustellen ist).

66. Zum Schluß will ich zwei an den Satz IX anschließende Fragen erwähnen und den Zusammenhang mit den in der Literatur vorhandenen Resultaten erörtern.

Ich schreibe jetzt die ganze transzendente Funktion $G(z)$ so, daß die von Null verschiedenen Koeffizienten hervorgehoben werden, also in der Form

$$G(z) = A_1 z^{\lambda_1} + A_2 z^{\lambda_2} + \ldots + A_n z^{\lambda_n} + \ldots, \qquad A_n \neq 0, \tag{79}$$

$$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots .$$

Daß die Koeffizientendichte $= 0$ ist, wird durch

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0 \tag{80}$$

ausgedrückt. Man kann aber neben (80) noch andere, mehr einschränkende „Lückenbedingungen" betrachten, z. B. daß

$$\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} + \ldots \tag{81}$$

konvergiert, oder die noch mehr einschränkende Bedingung, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}{\log \lambda_{n+1}} > \frac{1}{2} \tag{82}$$

ist.

a) Folgt aus der Bedingung (80), daß die ganze Funktion (79) keinen Picardschen Ausnahmewert besitzt? (Es heißt a Picardscher Ausnahmewert von $G(z)$, wenn $G(z) - a$ keine oder nur endlich viele Nullstellen hat.)

Daß unter der Bedingung (81) die ganze Funktion (79) jeden Wert mindestens einmal annimmt, hat Fejér auf einem sehr interessanten algebraischen Weg gezeigt, und daß sie jeden Wert beliebig oft annimmt, hat unter Weiterentwicklung der Fejérschen, inzwischen übrigens auch von Montel wiederentdeckten Methode Biernacki gezeigt[56]).

Daß auch unter der Bedingung (80) und der zusätzlichen Einschränkung, daß (79) von *endlicher Ordnung* sei, kein Picardscher Ausnahmewert existiert, zeigt Satz IX: Denn wäre a ein Picardscher Ausnahmewert

[56]) Die Sätze bei L. Fejér, Math. Annalen **65** (1908), S. 413–423 auf S. 422 und bei M. Biernacki, Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires, Thèse, Paris 1928, auf S. 22 sind gleichlautend, aber an ersterer Stelle heißt Picardscher Ausnahmewert ein solcher Wert, der keinmal, und an letzterer Stelle ein solcher, der nur endlich oft angenommen wird. Die erste Bemerkung in dieser Richtung steht wohl bei J. Hadamard, Comptes Rendus Paris **135** (1902), p. 1309–1311.

von $G(z)$, so wäre a notwendigerweise, wie bekannt[57]), auch Konvergenzwert von $G(z)$; letzteres ist aber durch Satz IX ausgeschlossen. Allerdings ist es überflüssig auf Satz IX zurückzugreifen, der Schluß läßt sich auch viel einfacher ziehen, wie folgt: Wenn $G(z)$ den Picardschen Ausnahmewert a besitzt und von endlicher Ordnung ist, so ist bekanntlich

$$G(z) = a + P(z)\, e^{Q(z)},$$

wo $P(z)$, $Q(z)$ Polynome sind. Es genügt $w = G(z)$ der linearen Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = (P'(z) + P(z)\, Q'(z))(w - a),$$

also besteht zwischen den Koeffizienten seiner Potenzreihe eine Rekursionsformel. Bezieht sich diese auf l sukzessive Koeffizienten, so gibt es unter denen mindestens einen nichtverschwindenden, also ist die untere Dichte der Koeffizienten (wie auch die Minimaldichte) $\geqq 1/l > 0$.

Man kann also aus der Bedingung (80) auf die Nichtexistenz des Picardschen Ausnahmewertes schließen, wenn $G(z)$ von endlicher Ordnung ist: Kann man es auch dann, wenn $G(z)$ von unendlicher Ordnung ist? In bezug auf die Existenz eines Konvergenzwertes unter Bedingung (80) besteht ein Unterschied, wie wir gesehen haben, zwischen Funktionen endlicher und unendlicher Ordnung.

b) Folgt aus der Bedingung (80) im Falle *endlicher* Ordnung, daß

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log m(r)}{\log M(r)} = 1 \tag{83}$$

ist? (Unter $M(r)$ verstehe ich, wie bisher, das Maximum und unter $m(r)$ das Minimum von $|G(z)|$ auf dem Kreisrande $|z| = r$.)

Das Bestehen von (83) würde über Satz IX hinausgehen; Satz IX ist zwar eine wesentliche Annäherung an (83), aber es folgt daraus ohne weiteres nicht einmal, daß die linke Seite von (83) positiv ist. Unter der viel stärker einschränkenden Lückenbedingung (82) folgt aus den Untersuchungen von Wiman[58]) nicht bloß (83), sondern ohne Beschränkung der Ordnung sogar

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m(r)}{M(r)} = 1.$$

[57]) Vgl. z. B. Pólya-Szegö, a. a. O.[17]) **2**, Nr. IV 194, S. 34 und 215.

[58]) A. Wiman, Acta Mathematica **37** (1914), p. 305–326 und **41** (1916), p. 1–28, vgl. insbesondere S. 8.

Bei Korrekturschluß sei zur Ergänzung des Satzes VIb in Nr. 58 und der Fußnote [37]) verwiesen auf M. Biernacki, Comptes Rendus **187** (1928), p. 477—479 und V. Bernstein, daselbst **186** (1928), p. 1407—1410.

(Eingegangen am 16. Juni 1928.)